

การแก้ปัญหาตัวแปร Artificial Variable

1. Two-phase

2. Big-M

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

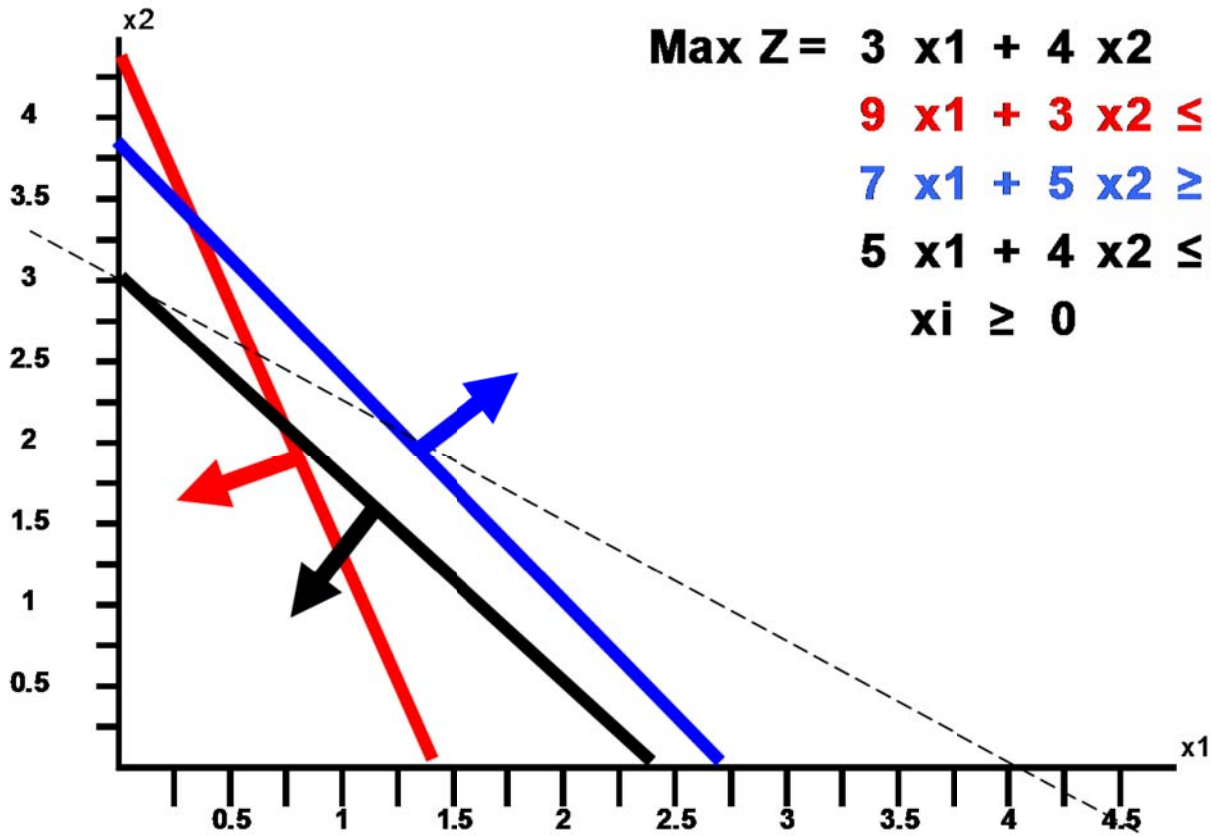
$$9x_1 + 3x_2 \leq 13$$

$$7x_1 + 5x_2 \geq 19$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_i \geq 0$$

วิธีกราฟ



$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3 x_1 + 4 x_2 \\ 9 x_1 + 3 x_2 &\leq 13 \\ 7 x_1 + 5 x_2 &\geq 19 \\ 5 x_1 + 4 x_2 &\leq 12 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Infeasible Solution → Max Z = ไม่มี

วิธี Simplex แบบ Two Phase

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3 x_1 + 4 x_2 \\ 9 x_1 + 3 x_2 &\leq 13 \\ 7 x_1 + 5 x_2 &\geq 19 \\ 5 x_1 + 4 x_2 &\leq 12 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

จากโจทย์สามารถสร้างสมการขยายได้เป็น

$$\begin{aligned} \text{Max } Z & - 3 x_1 - 4 x_2 & & = 0 \\ 9 x_1 + 3 x_2 + S_1 & & & = 13 \\ 7 x_1 + 5 x_2 & - S_2 + R_1 & & = 19 \\ 5 x_1 + 4 x_2 & & + S_3 & = 12 \\ x_i & \geq 0 \end{aligned}$$

Phase 1

1. ตั้งรูปแบบปัญหาใหม่

กำหนดเป้าหมายเป็น Min และสมการเป้าหมายใหม่ที่ตั้งขึ้นจะเป็นผลรวมของ Artificial Variables ทั้งหมด

$$\text{Min } Z - R1 = 0$$

$$9 x1 + 3 x2 + S1 = 13$$

$$7 x1 + 5 x2 - S2 + R1 = 19$$

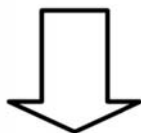
$$5 x1 + 4 x2 + S3 = 12$$

$$x_i \geq 0$$

2. จัดตั้งปัญหาให้เป็นผลลัพท์ขั้นมูลฐาน Phase 1

ย้ายข้างสมการ Artificial Variables เพื่อเตรียมไปไว้ในสมการเป้าหมายใน Phase 1

$$7 x1 + 5 x2 - S2 + R1 = 19$$



$$R1 = 19 - 7 x1 - 5 x2 + S2$$

ผลลัพธ์เบื้องต้น Phase 1 เป็นดังนี้

$$\begin{array}{rclclcl} \text{Min } Z & + & 7x_1 & + & 5x_2 & - & S_2 & & = & 19 \\ & & 9x_1 & + & 3x_2 & + & S_1 & & = & 13 \\ & & 7x_1 & + & 5x_2 & - & S_2 & + & R_1 & = & 19 \\ & & 5x_1 & + & 4x_2 & & & + & S_3 & = & 12 \\ & & x_i & \geq & 0 & & & & & & \end{array}$$

3. ใช้วิธี Simplex ธรรมดาหาผลลัพธ์

โดยจัดทำเป้าหมาย $Z = 0$ เท่านั้น ถ้าไม่สามารถจัดทำให้ $Z = 0$ แสดงว่าเกิดปัญหาไม่สามารถหาคำตอบได้ (Infeasible Solution) ถ้าปัญหามีคำตอบจึงจัดทำ Phase 2 ต่อไป

ตารางผลลัพธ์ขั้นมูลฐาน (Phase 1 Initial Tableau)

	z	x1	x2	S1	S2	S3	R1	b
z	1	7	5	0	-1	0	0	19
S1	0	9	3	1	0	0	0	13
R1	0	7	5	0	-1	0	1	19
S3	0	5	4	0	0	1	0	12

	z	x1	x2	S1	S2	S3	R1	b
z	1	7	5	0	-1	0	0	19
S1	0	9	3	1	0	0	0	13
R1	0	7	5	0	-1	0	1	19
S3	0	5	4	0	0	1	0	12

$b/a \Rightarrow$ 1.444444
 2.714286
 2.4

	z	x1	x2	S1	S2	S3	R1	b
z	1	0	2.666667	-0.777778	-1	0	0	8.888889
x1	0	1	0.333333	0.111111	0	0	0	1.444444
R1	0	0	2.666667	-0.777778	-1	0	1	8.888889
S3	0	0	2.333333	-0.555556	0	1	0	4.777778

$b/a \Rightarrow$ 4.333333
 3.333333
 2.047619

	z	x1	x2	S1	S2	S3	R1	b
z	1	0	0	-0.14286	-1	-1.14286	0	3.428571
x1	0	1	0	0.190476	0	-0.14286	0	0.761905
R1	0	0	0	-0.14286	-1	-1.14286	1	3.428571
x2	0	0	1	-0.2381	0	0.428571	0	2.047619

Infeasible Solution \rightarrow **Max Z = ไม่มี**

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

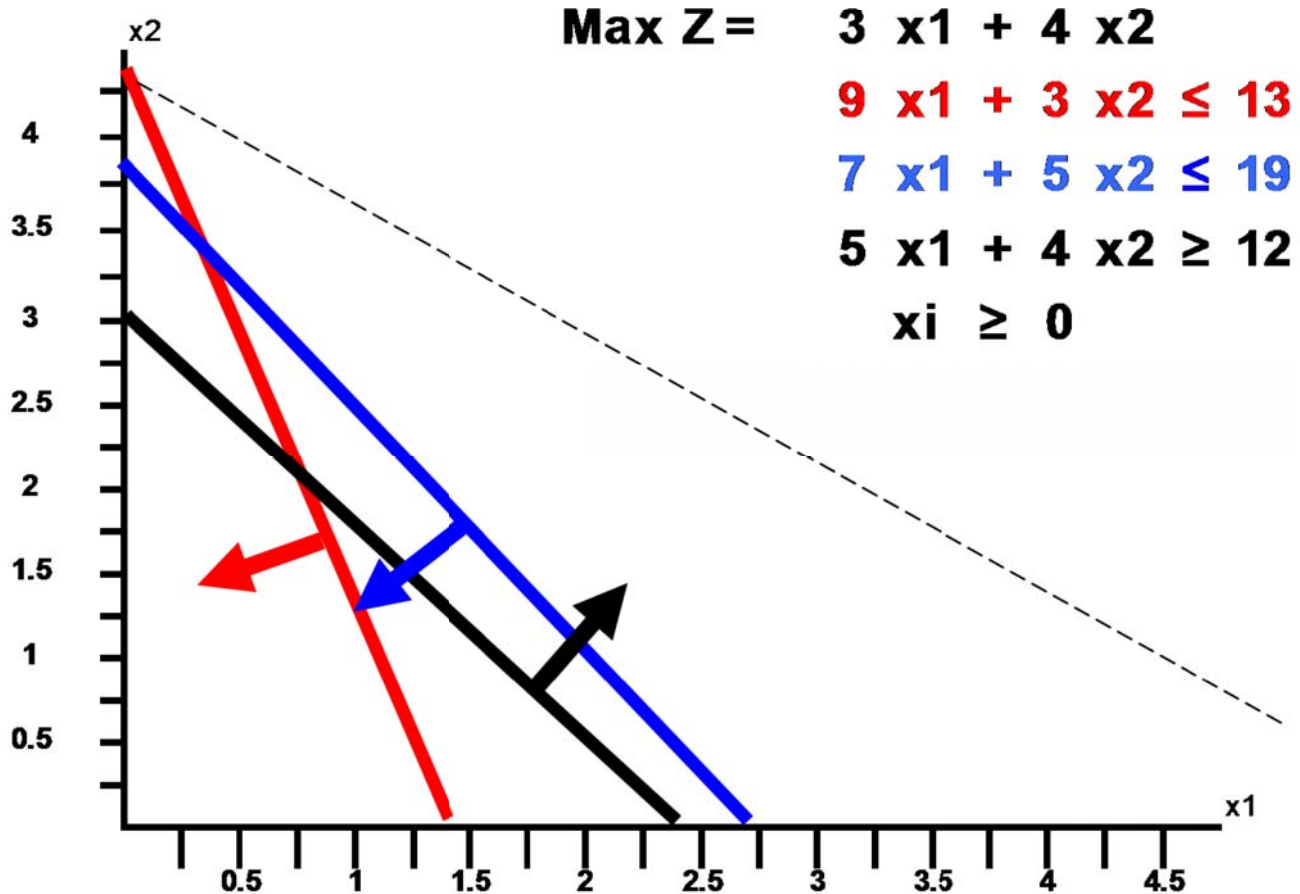
$$9x_1 + 3x_2 \leq 13$$

$$7x_1 + 5x_2 \leq 19$$

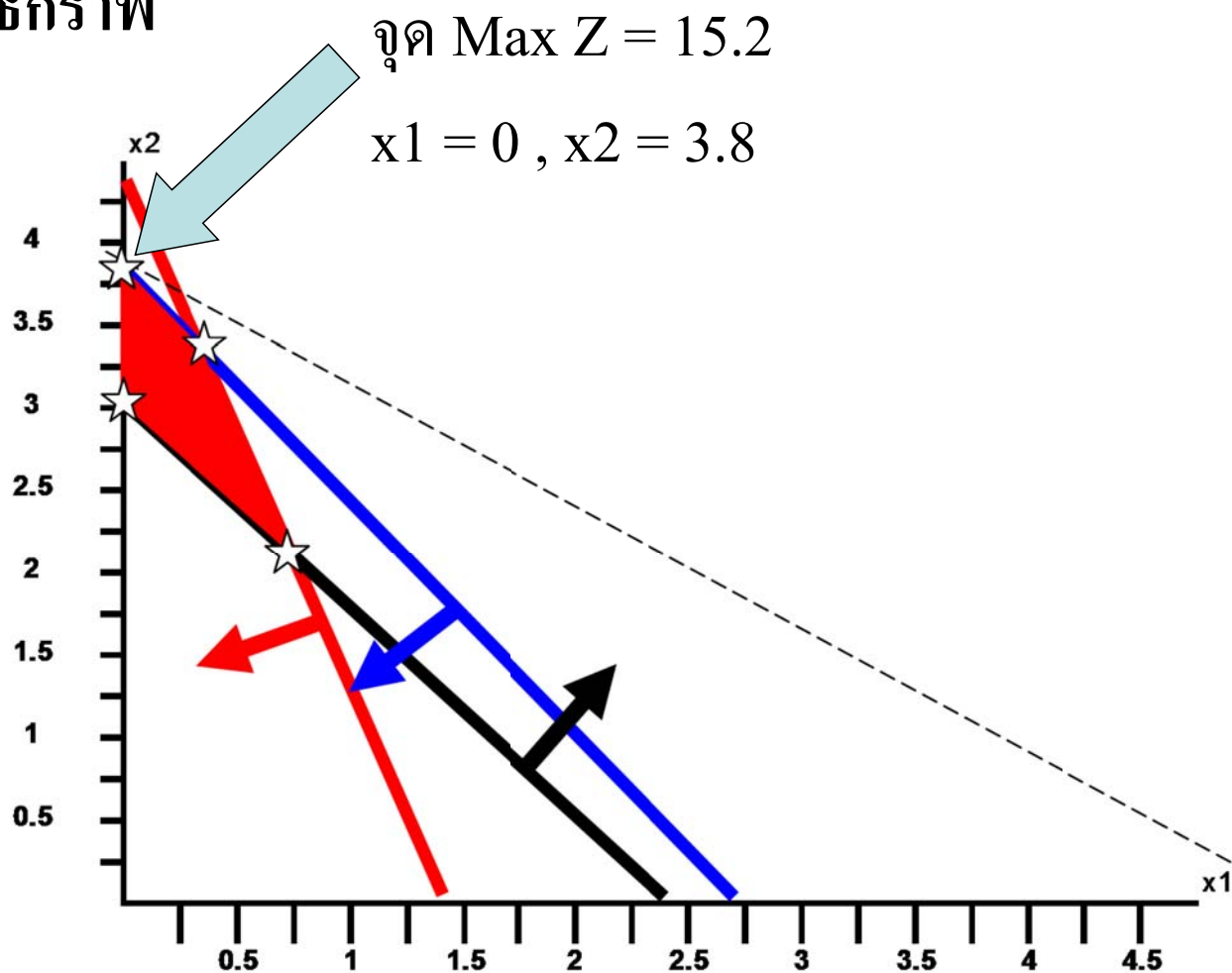
$$5x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_i \geq 0$$

วิธีกราฟ



วิธีกราฟ



วิธี Simplex แบบ Two Phase

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3 x_1 + 4 x_2 \\ 9 x_1 + 3 x_2 &\leq 13 \\ 7 x_1 + 5 x_2 &\leq 19 \\ 5 x_1 + 4 x_2 &\geq 12 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

จากโจทย์สามารถสร้างสมการขยายได้เป็น

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &- 3 x_1 - 4 x_2 &&= 0 \\ 9 x_1 + 3 x_2 + S_1 &&&= 13 \\ 7 x_1 + 5 x_2 &+ S_2 &&= 19 \\ 5 x_1 + 4 x_2 &&- S_3 + R_1 &= 12 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Phase 1

1. ตั้งรูปแบบปัญหาใหม่

กำหนดเป้าหมายเป็น Min และสมการเป้าหมายใหม่ที่ตั้งขึ้นจะเป็นผลรวมของ Artificial Variables ทั้งหมด

$$\text{Min } Z - R1 = 0$$

$$9 x1 + 3 x2 + S1 = 13$$

$$7 x1 + 5 x2 + S2 = 19$$

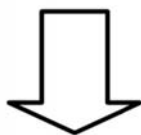
$$5 x1 + 4 x2 - S3 + R1 = 12$$

$$x_i \geq 0$$

2. จัดตั้งปัญหาให้เป็นผลลัพท์ขั้นมูลฐาน Phase 1

ย้ายข้างสมการ Artificial Variables เพื่อเตรียมไปไว้ในสมการเป้าหมายใน Phase 1

$$5 x1 + 4 x2 - S3 + R1 = 12$$



$$R1 = 12 - 5 x1 - 4 x2 + S3$$

ผลลัพธ์เบื้องต้น Phase 1 เป็นดังนี้

$$\begin{array}{rclcl} \text{Min Z} & + & 5x_1 & + & 4x_2 & & - & S_3 & = & 12 \\ & & 9x_1 & + & 3x_2 & + & S_1 & & = & 13 \\ & & 7x_1 & + & 5x_2 & & + & S_2 & = & 19 \\ & & 5x_1 & + & 4x_2 & & - & S_3 & + & R_1 & = & 12 \\ & & x_i & \geq & 0 & & & & & & & \end{array}$$

3. ใช้วิธี Simplex ธรรมดาหาผลลัพธ์

โดยจัดทำเป้าหมาย $Z = 0$ เท่านั้น ถ้าไม่สามารถจัดทำให้ $Z = 0$ แสดงว่าเกิดปัญหาไม่สามารถหาคำตอบได้ (Infeasible Solution) ถ้าปัญหามีคำตอบจึงจัดทำ Phase 2 ต่อไป

ตารางผลลัพธ์ขั้นมูลฐาน (Phase 1 Initial Tableau)

	z	x1	x2	S1	S2	S3	R1	b
z	1	5	4	0	0	-1	0	12
S1	0	9	3	1	0	0	0	13
S2	0	7	5	0	1	0	0	19
R1	0	5	4	0	0	-1	1	12

	z	x1	x2	S1	S2	S3	R1	b
z	1	5	4	0	0	-1	0	12
S1	0	9	3	1	0	0	0	13
S2	0	7	5	0	1	0	0	19
R1	0	5	4	0	0	-1	1	12

$b/a \Rightarrow$

 1.444444

 2.714286

 2.4

	z	x1	x2	S1	S2	S3	R1	b
z	1	0	2.333333	-0.555556	0	-1	0	4.777778
x1	0	1	0.333333	0.111111	0	0	0	1.444444
S2	0	0	2.666667	-0.777778	1	0	0	8.888889
R1	0	0	2.333333	-0.555556	0	-1	1	4.777778

$b/a \Rightarrow$

 4.333333

 3.333333

 2.047619

	z	x1	x2	S1	S2	S3	R1	b
z	1	0	0	0	0	0	-1	0
x1	0	1	0	0.190476	0	0.142857	-0.14286	0.761905
S2	0	0	0	-0.14286	1	1.142857	-1.14286	3.428571
x2	0	0	1	-0.2381	0	-0.42857	0.428571	2.047619

feasible Solution \rightarrow Max Z = มีคำตอบ

Phase 2

1. นำผลลัพธ์จากตาราง Phase 1 มาเปลี่ยนเป็นสมการ
เป้าหมายของโจทย์ปัญหา

(Phase 2 Initial Tableau)

	z	x1	x2	S1	S2	S3		b
z	1	-3	-4	0	0	0		0
x1	0	1	0	0.190476	0	0.142857		0.761905
S2	0	0	0	-0.14286	1	1.142857		3.428571
x2	0	0	1	-0.2381	0	-0.42857		2.047619

ตารางรอบที่ 1

	z	x1	x2	S1	S2	S3		b
z	1	-3	-4	0	0	0		0
x1	0	1	0	0.190476	0	0.142857		0.761905
S2	0	0	0	-0.14286	1	1.142857		3.428571
x2	0	0	1	-0.2381	0	-0.42857		2.047619

b/a ==>

2.047619

ตารางรอบที่ 2

	z	x1	x2	S1	S2	S3		b
z	1	-3	0	-0.95238	0	-1.71429		8.190476
x1	0	1	0	0.190476	0	0.142857		0.761905
S2	0	0	0	-0.14286	1	1.142857		3.428571
x2	0	0	1	-0.2381	0	-0.42857		2.047619

b/a ==>

0.761905

ตารางรอบที่ 3

	z	x1	x2	S1	S2	S3		b
z	1	0	0	-0.38095	0	-1.28571		10.47619
x1	0	1	0	0.190476	0	0.142857		0.761905
S2	0	0	0	-0.14286	1	1.142857		3.428571
x2	0	0	1	-0.2381	0	-0.42857		2.047619

b/a ==> $\frac{4}{\quad}$

ตารางรอบที่ 4

	z	x1	x2	S1	S2	S3		b
z	1	2	0	0	0	-1		12
S1	0	5.25	0	1	0	0.75		4
S2	0	0.75	0	0	1	1.25		4
x2	0	1.25	1	0	0	-0.25		3

b/a ==> $\frac{5.333333}{3.2}$
-12

ตารางรอบที่ 5

	z	x1	x2	S1	S2	S3		b
z	1	2.6	0	0	0.8	0		15.2
S1	0	4.8	0	1	-0.6	0		1.6
S3	0	0.6	0	0	0.8	1		3.2
x2	0	1.4	1	0	0.2	0		3.8

จุด Max Z = 15.2

$x1 = 0$, $x2 = 3.8$,

$S1 = 1.6$, $S3 = 3.2$

ตรวจคำตอบว่าจำนวนถูกต้องหรือไม่

จุด Max Z = 15.2

$x_1 = 0$, $x_2 = 3.8$, $S_1 = 1.6$, $S_3 = 3.2$

$$\begin{aligned} \text{Max Z} & - 3 x_1 - 4 x_2 & = & 0 \\ & 9 x_1 + 3 x_2 + S_1 & = & 13 \\ & 7 x_1 + 5 x_2 + S_2 & = & 19 \\ & 5 x_1 + 4 x_2 - S_3 + R_1 & = & 12 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

ลองแทนค่า LHS = RHS แสดงว่าจำนวนได้ถูกต้อง

$$\begin{aligned} 15.2 - 3 (0) - 4 (3.8) & = 0 \\ 9 (0) + 3 (3.8) + 1.6 & = 13 \\ 7 (0) + 5 (3.8) & = 19 \\ 5 (0) + 4 (3.8) - 3.2 & = 12 \end{aligned}$$