วฐา มินเสน รหัส 48850226
http://beam.to/statistics

Chapter 1

1.1 Calculate the sample means , the sample variance and the sample covariance.

	x_1	x_2	$(x_1-\overline{x}_1)^2$	$(x_2-\overline{x}_2)^2$	$(x_1-\overline{x}_1)(x_2-\overline{x}_2)$
	3	5	1.65	1.65	1.65
	4	5.5	0.08	0.62	0.22
	2	4	5.22	5.22	5.22
	6	7	2.94	0.51	1.22
	8	10	13.80	13.80	13.80
	2	5	5.22	1.65	2.94
	5	7.5	0.51	1.47	0.87
Total	30	44	29.43	24.93	25.93
Sample mean	4.29	6.29			
Sample variance			4.20	3.56	
Sample covariance					3.70

	x_1	x_2
Sample mean	4.29	6.29
Sample variance	4.20	3.56
Sample covariance	3.70	

Note:

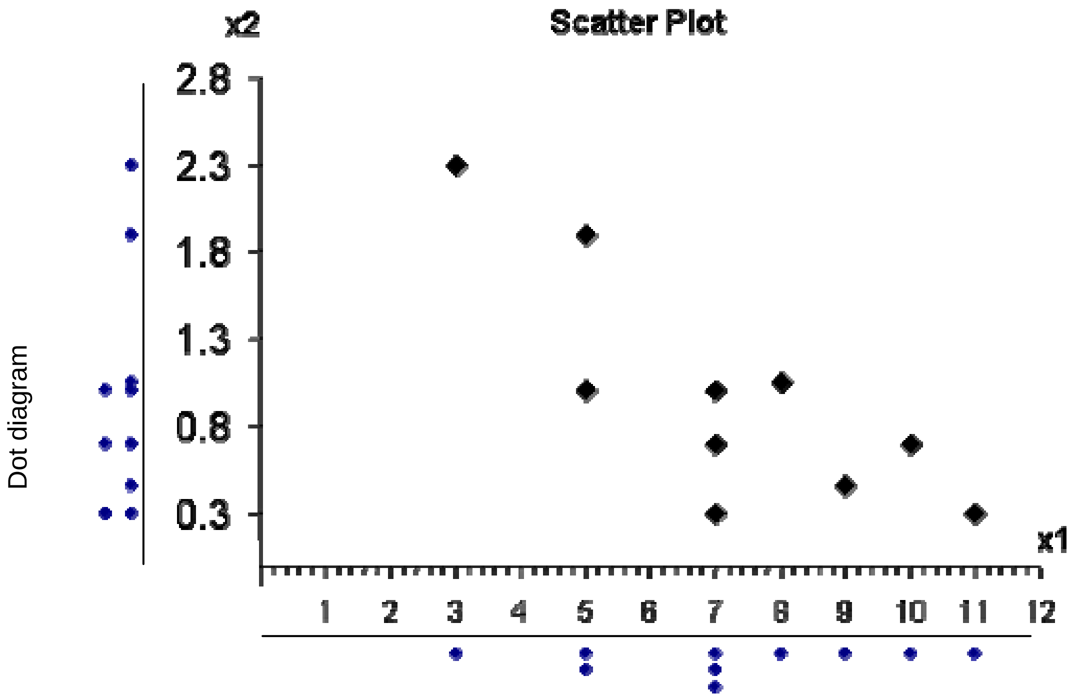
Sample variance = $\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_{jk}-\overline{x}_k)^2}{n}, k=1,2$

Sample covariance = $\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_{ji}-\overline{x}_i)(x_{jk}-\overline{x}_k)}{n}, i=1,2 \quad k=1,2$

1.2

x_1	3	5	5	7	7	7	8	9	10	11
x_2	2.3	1.9	1	0.7	0.3	1	1.05	0.45	0.7	0.3

a) Construct a scatter plot of the data and marginal dot diagrams.



Dot diagram

b) Infer the sign of the sample covariance s_{12} from the scatter plot

จากการพิจารณา Scatter Plot จุดมีแนวโน้มลาดลงจาก ซ้ายมาขวา นั้นคือ x_1 มากขึ้น x_2 น้อยลง แสดงว่าเครื่องหมายของ Sample covariance s_{12} ควรเป็นเครื่องหมายลบ

c) Compute the sample mean , the sample variance , the sample covariance and sample correlation coefficient. Interpret these quantities.

$\bar{x}_1$	=	7.2	$\bar{x}_2$	=	0.97
s_{11}	=	5.36	s_{22}	=	0.3956
s_{12}	=	-1.169	r_{12}	=	-0.80279

จากการพิจารณาค่า r พบว่ามีค่าเป็นลบและมีค่าเข้าใกล้ -1 เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น(-) นั้นคืออายุรถยนต์กับราคาขายของมันมีความสัมพันธ์แบบผกผันกัน นั้นคือยิ่งรถยนต์มีอายุมากราคาขายของมันก็จะน้อยลงไป

d) Display the sample mean array $\bar{x}$, the sample variance-covariance array S_n and the sample correlation array R using (1-18).

Sample mean $\bar{x}$ $= \begin{bmatrix} 7.2 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

Sample variance and covariance S_n $= \begin{bmatrix} 5.36 & -1.169 \\ -1.169 & 0.3956 \end{bmatrix}$

Sample correlation R $= \begin{bmatrix} 1 & -0.80279 \\ -0.80279 & 1 \end{bmatrix}$

1.3 Find the array $\bar{x}$, S_n and R .

x_1	9	2	6	5	8
x_2	12	8	6	4	10
x_3	3	4	0	2	1

Sample mean $\bar{x}$ $= \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

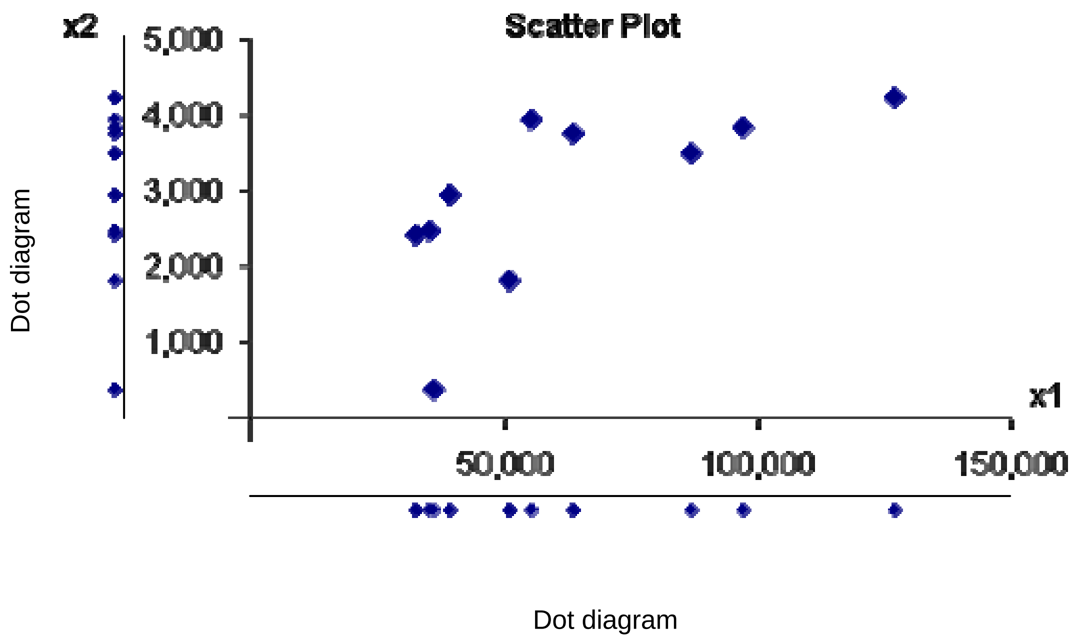
Sample variance and covariance S_n $= \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1.4 \\ 4 & 8 & 1.2 \\ -1.4 & 1.2 & 2 \end{bmatrix}$

Sample correlation R $= \begin{bmatrix} 1 & 0.57735 & -0.40415 \\ 0.57735 & 1 & 0.3 \\ -0.40415 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$

1.4

Company (millions of dollars)	x_1 = sales	x_2 = profits	x_3 = assets
General Motors	126,974	4,224	173,297
Ford	96,933	3,835	160,893
Exxon	86,656	3,510	83,219
IBM	63,438	3,758	77,734
General Electric	55,264	3,939	128,344
Mobil	50,976	1,809	39,080
Philip Morris	39,069	2,946	38,528
Chrysler	36,156	359	51,038
Du Pont	35,209	2,480	34,715
Texaco	32,416	2,413	25,636

a) Plot the scatter diagram and marginal dot diagrams for variables x_1 and x_2. Comment on the appearance of the diagrams.



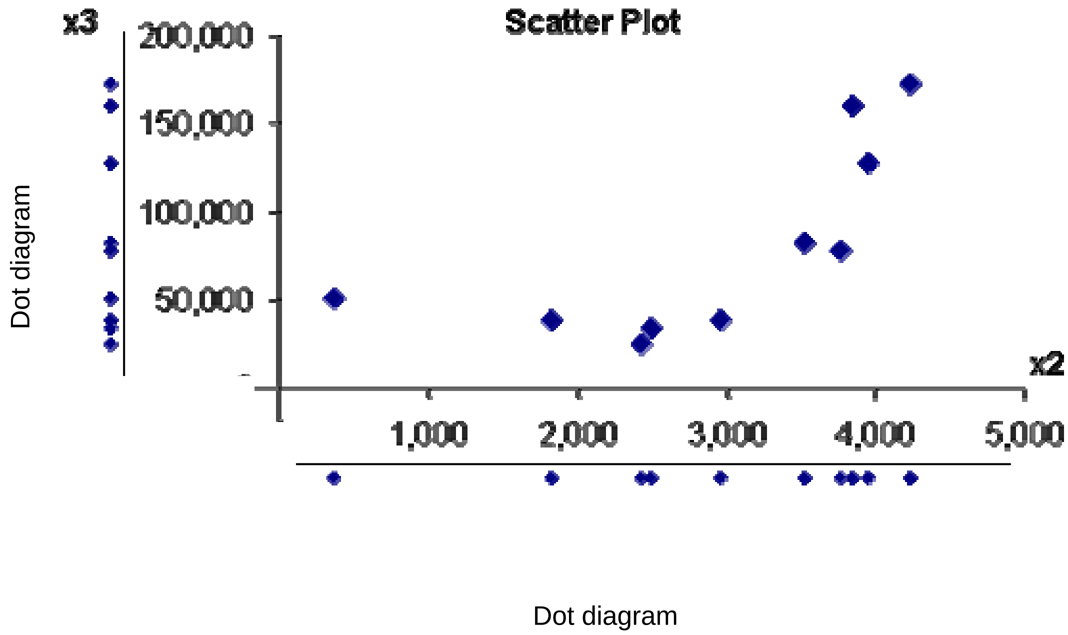
b) Compute

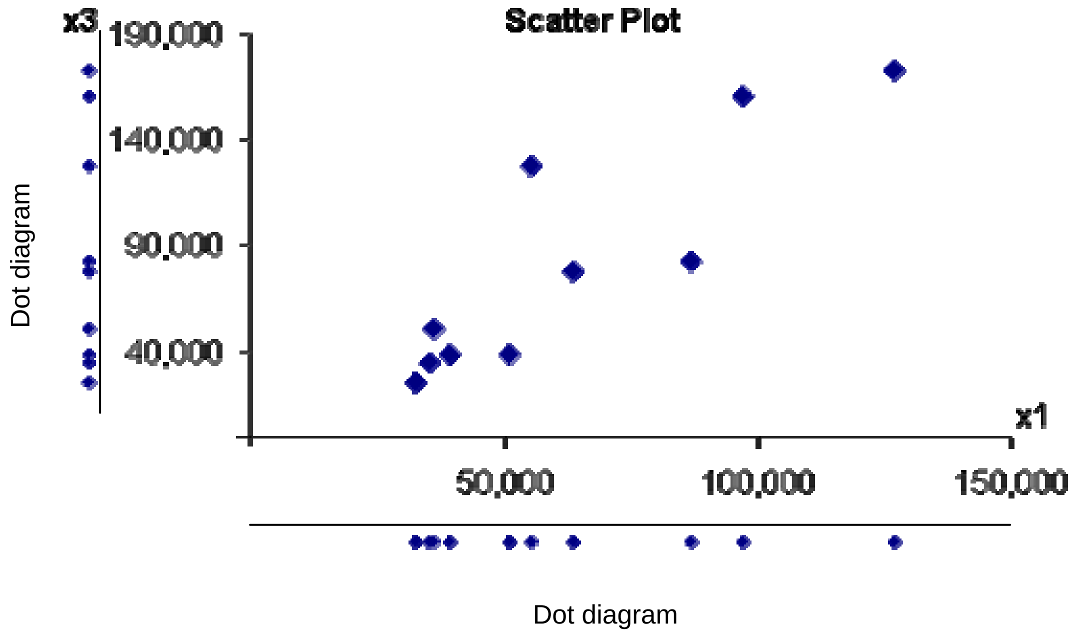
$\bar{x}_1$	=	62,309	$\bar{x}_2$	=	2,927
s_{11}	=	900,458,202	s_{22}	=	1,287,018
s_{12}	=	23,018,040	r_{12}	=	0.676152

จากการพิจารณาค่า r_{12} พบว่ามีค่าเป็นลบและมีค่าเข้าใกล้ 1 เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น (+) นั้นคือ การขาย (sales) กับกำไร (profits) มีความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบตามกัน (+) คือ เมื่อมีการขายมากขึ้นกำไรก็จะเพิ่มขึ้นตามไปด้วย

1.5 Use the data in Exercise 1.4.

a)





Comment : จากการพิจารณา Scatter Plot จุดที่ plot มีแนวโน้มชั้นขึ้นจาก ซ้ายไปขวา ทั้งสองรูป นั้นคือ x_2 มากขึ้น x_3 มากขึ้นด้วย และ x_1 มากขึ้น x_3 ก็มากขึ้นด้วยเช่นกัน สรุปก็คือ กำไร(profits)น่าจะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบบวก(+)กับสินทรัพย์(assets) และ การขาย(sales)น่าจะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบบวก(+) กับสินทรัพย์ (assets) ด้วยเช่นกัน

b) Compute the array $\overline{x}$, S_n and R .

Sample mean $\overline{x}$ $= \begin{bmatrix} 62,309 \\ 2,927 \\ 81,248 \end{bmatrix}$

Sample variance and covariance S_n

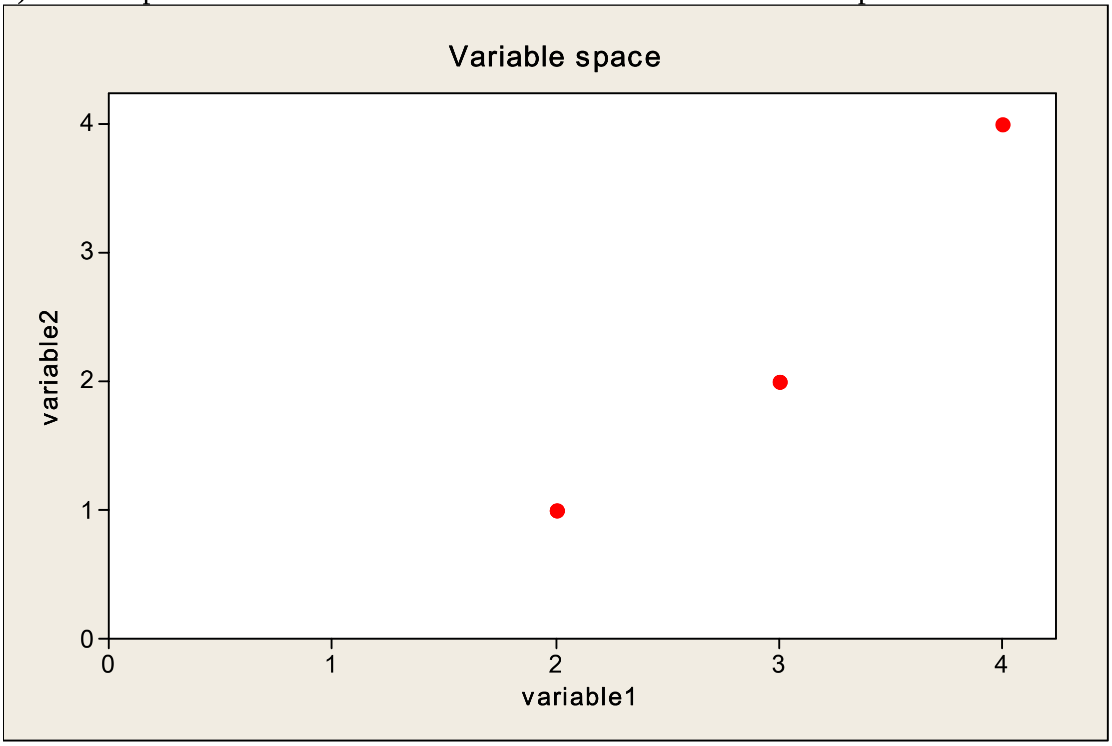
$$= \begin{bmatrix} 900,458,202 & 23,018,040 & 1,360,644,507 \\ 23,018,040 & 1,287,018 & 41,089,157 \\ 1,360,644,507 & 41,089,157 & 2,682,440,803 \end{bmatrix}$$

Sample correlation R $= \begin{bmatrix} 1 & 0.676 & 0.875 \\ 0.676 & 1 & 0.699 \\ 0.875 & 0.699 & 1 \end{bmatrix}$

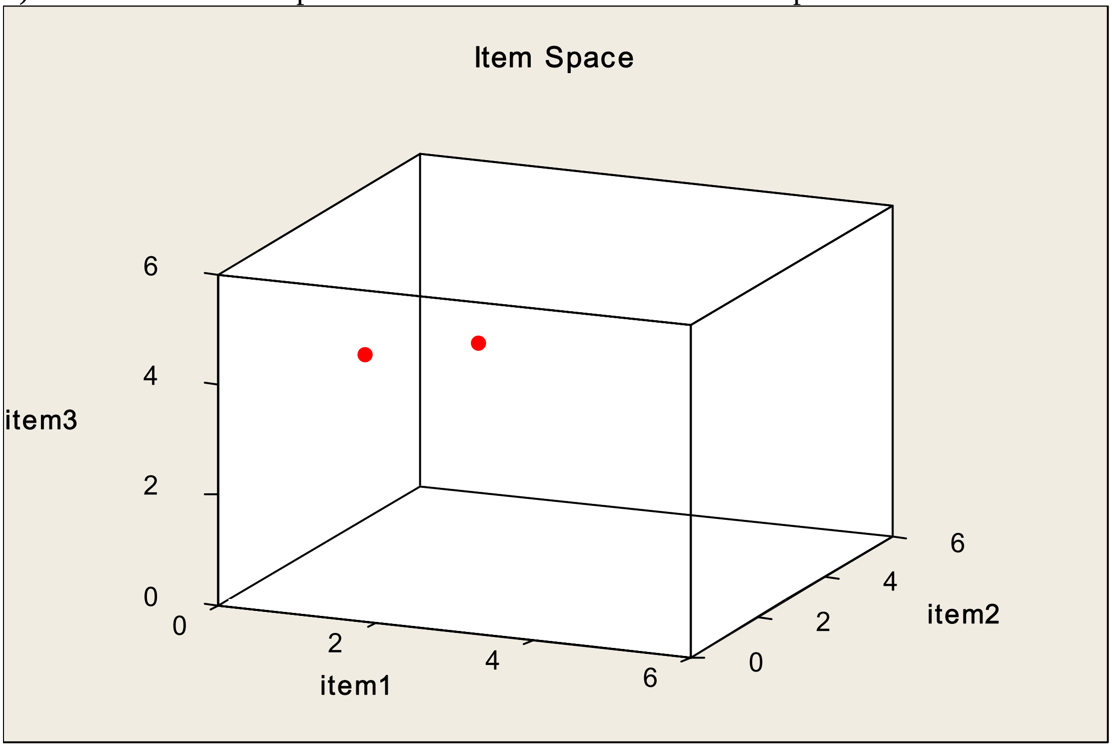
1.7 You are given the following $n = 3$ observations on $p = 2$ variables.

Variable 1	Variable 2
2	1
3	2
4	4

a) Plot the pairs of observations in the two-dimensional "variable space."



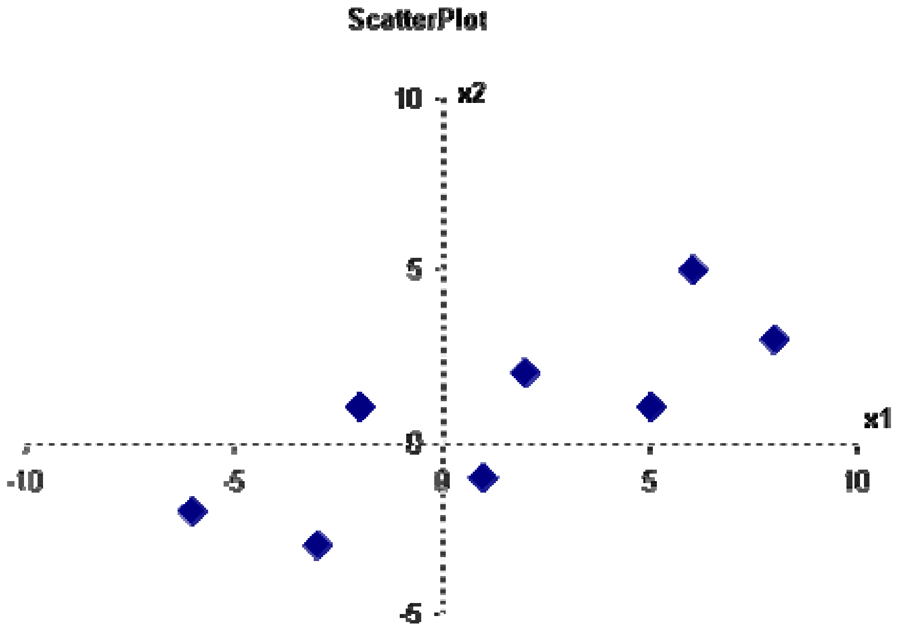
b) Plot the data as two points in the three-dimensional "item space".



1.9

x1	-6	-3	-2	1	2	5	6	8
x2	-2	-3	1	-1	2	1	5	3

a) Plot the data as a scatter diagram, and compute s_{11} , s_{22} and s_{12} .

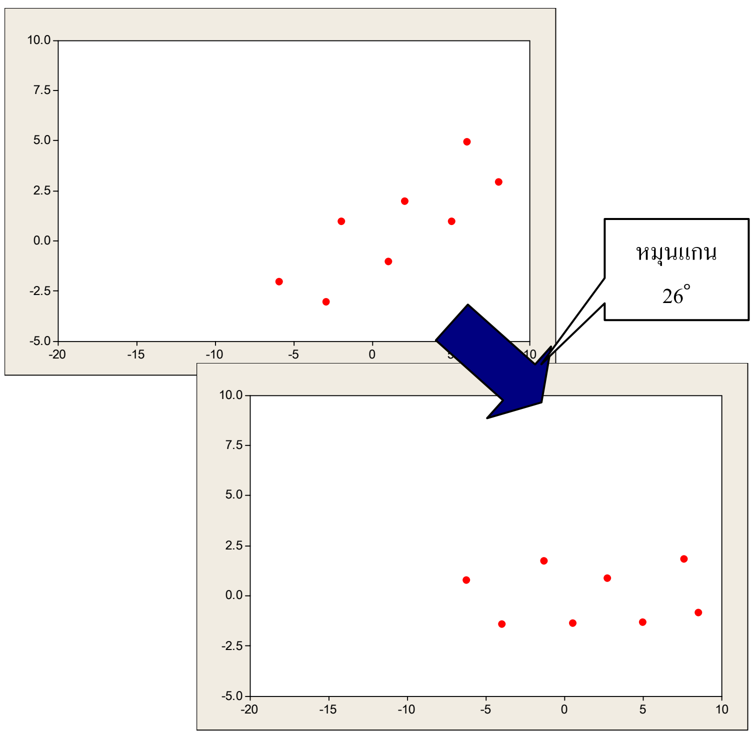


s_{11} = 20.48438 s_{22} = 6.1875

s_{12} = 9.09375

b)

$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$
-6.27	0.83
-4.011	-1.383
-1.36	1.775
0.461	-1.337
2.674	0.922
4.933	-1.291
7.584	1.867
8.506	-0.807



c) Compute the sample variances $\tilde{s}_{11}$ and $\tilde{s}_{22}$.

$\tilde{s}_{11}$ = 24.90407

$\tilde{s}_{22}$ = 1.769002

d) Transform new pair of measurements

$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$
2.72	-3.55

The distance $d(0,P)$ = 2.72417882169943

e)

a_{11} = 0.1409

a_{22} = 0.464572

a_{12} = -0.20678

The distance $d(0,P)$ = 2.72417882169944

ค่า The distance ที่คำนวณได้จากค่า e) และ d) มีค่าเท่าเทียมกัน ผลจาก Within rounding error มีเล็กน้อยเท่านั้น

1.16

Sample mean $\bar{x}$ $= \begin{bmatrix} 0.8438 \\ 0.81832 \\ 1.79268 \\ 1.73484 \\ 0.7044 \\ 0.69384 \end{bmatrix}$

Sample variance and covariance S_n

$$= \begin{bmatrix} 0.012 & 0.010 & 0.021 & 0.019 & 0.009 & 0.008 \\ 0.010 & 0.011 & 0.018 & 0.020 & 0.008 & 0.009 \\ 0.021 & 0.018 & 0.077 & 0.064 & 0.016 & 0.012 \\ 0.019 & 0.020 & 0.064 & 0.067 & 0.017 & 0.016 \\ 0.009 & 0.008 & 0.016 & 0.017 & 0.011 & 0.008 \\ 0.008 & 0.009 & 0.012 & 0.016 & 0.008 & 0.010 \end{bmatrix}$$

Sample correlation R

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.852 & 0.691 & 0.668 & 0.744 & 0.678 \\ 0.852 & 1 & 0.612 & 0.749 & 0.742 & 0.810 \\ 0.691 & 0.612 & 1 & 0.894 & 0.552 & 0.440 \\ 0.668 & 0.749 & 0.894 & 1 & 0.626 & 0.619 \\ 0.744 & 0.742 & 0.552 & 0.626 & 1 & 0.729 \\ 0.678 & 0.810 & 0.440 & 0.619 & 0.729 & 1 \end{bmatrix}$$

-การพิจารณาค่า r ทั้งหมดพบว่ามีความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบบวก(+) กันทุกๆ ตัวแปรที่ทำการศึกษานั้น คือ ถ้ากระดูกชนิดหนึ่งมีค่า Mineral content in bones มาก กระดูกชนิดอื่นก็มีแนวโน้มที่จะมีค่า Mineral content in bones มากตามไปด้วย เป็นต้น

-การพิจารณา Dominant และ Nondominant ของกระดูกแต่ละส่วนทั้ง 3 ส่วน

พบว่า Dominant Radius กับ Nondominant Radius มีความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบบวก(+)อย่างมาก(0.852)

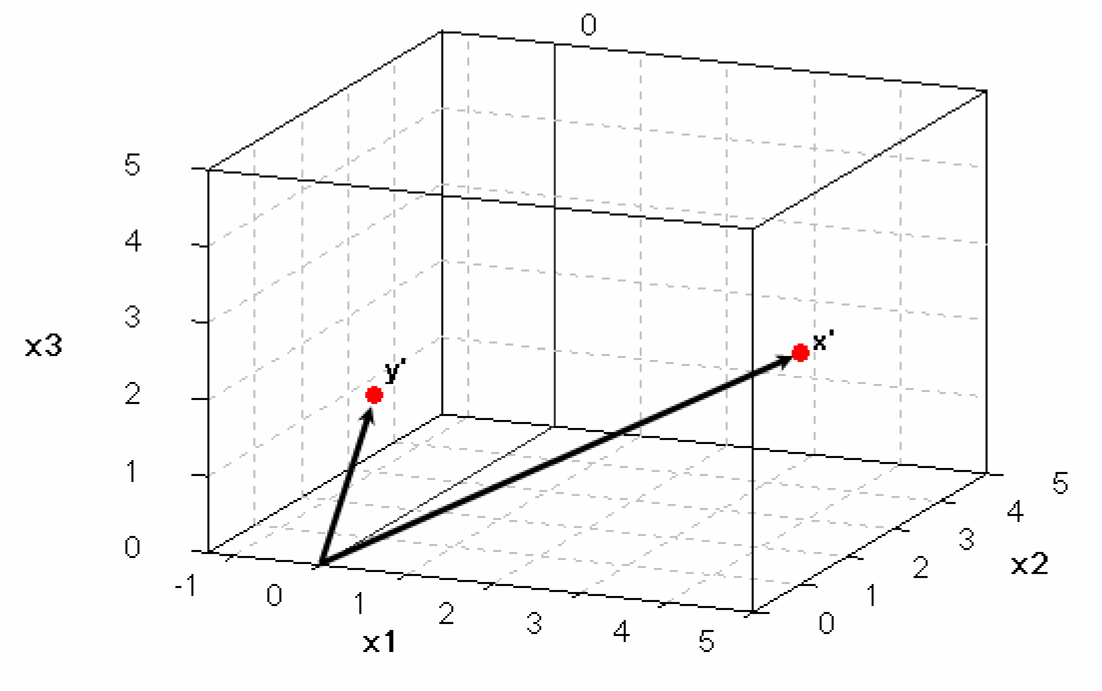
พบว่า Dominant Humerus กับ Nondominant Humerus มีความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบบวก(+)อย่างมาก(0.749)

พบว่า Dominant Ulna กับ Nondominant Ulna มีความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบบวก(+)อย่างมาก(0.729)

Chapter 2

2.1

a) Graph the two vectors.



b)

(i) $L_x = 5.91608$

(ii) $\cos(\theta) = \dfrac{1}{5.91608 \times 3.316625}$

$\cos(\theta) = 0.050965$

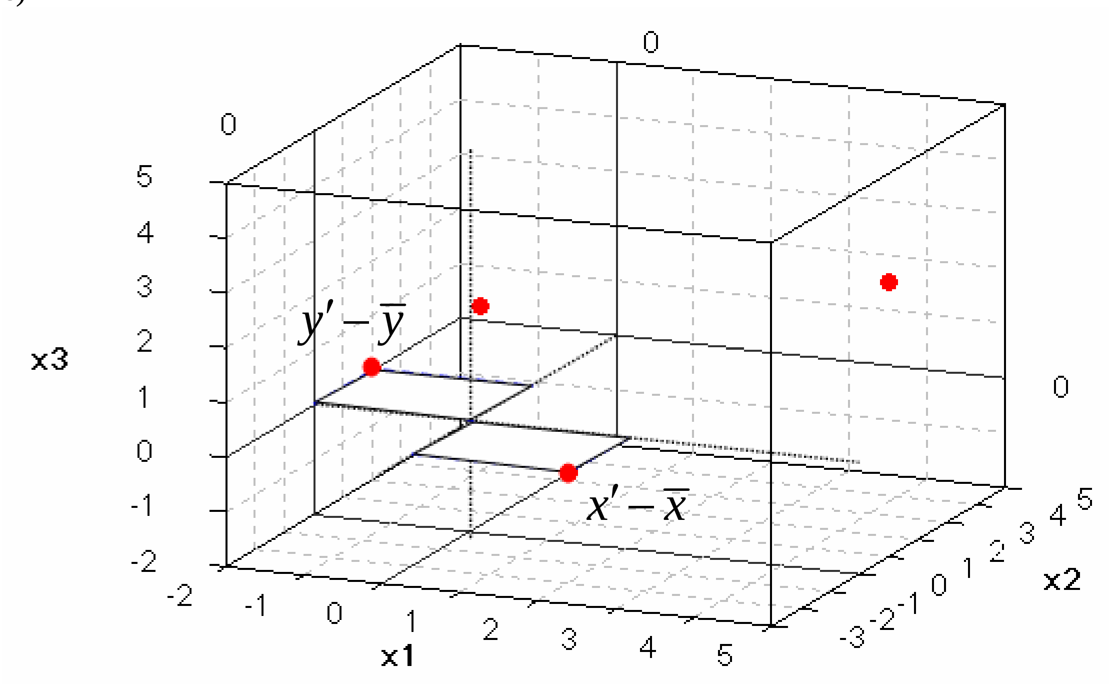
$\theta = 87.07867$

(iii) Projection of y on x =

$$= \frac{1}{5.91608 \times 5.91608} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.028571 \\ 0.085714 \\ 0.028571 \end{bmatrix}$$

c)



2.2 Given the matrices

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 1 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}5\\ -4\\ 2\end{bmatrix}$$

Perform the indicated multiplications.

a) $5A=\begin{bmatrix}-5 & 15\\ 20 & 10\end{bmatrix}$

b) $BA=\begin{bmatrix}-16 & 6\\ -9 & -1\\ 2 & -6\end{bmatrix}$

c) $A'B'=\begin{bmatrix}-16 & -9 & 2\\ 6 & -1 & -6\end{bmatrix}$

d) $C'B=\begin{bmatrix}12 & -7\end{bmatrix}$

e) Is AB defined?
No,AB is not defined.

2.8 Given the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Eigenvalue $\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -3$

เมื่อ $\lambda_1 = 2$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0.8944 \\ 0.4472 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\lambda_2 = -3$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ -0.8944 \end{bmatrix}$$

Determine the spectral decomposition (2-16) of A

$$A = \quad 2 \times \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} + (-3) \times \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.6 & 1.2 \\ 1.2 & -2.4 \end{bmatrix}$$

$$A = \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

2.21 Given the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a)

$$A'A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Eigenvalue $\lambda_1^2 = 10$

$\lambda_2^2 = 8$

เมื่อ $\lambda_1^2 = 10$

Eigenvector

$$u_1 = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\lambda_2^2 = 8$

Eigenvector

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

b)

$$AA' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Eigenvalue $\lambda_1^2 = 10$

$\lambda_2^2 = 8$

$\lambda_3^2 = 0$

เมื่อ $\lambda_1^2 = 10$

Eigenvector

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.4472 \\ 0 \\ -0.8944 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\lambda_2^2 = 8$

Eigenvector

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\lambda_3^2 = 0$

Eigenvector

$$v_3 = \begin{bmatrix} -0.8944 \\ 0 \\ 0.4472 \end{bmatrix}$$

จากข้อ a) และ b) จะเห็นว่า The nonzero eigenvalues are the same as those $A'A$

โดย $\lambda_3^2 = 0$ ที่ λ_1^2, λ_2^2 เหมือนกัน

c) Obtain the singular-value decomposition of A

$$AA'u_1 = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix} = 10 \times \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

$$AA'u_2 = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix} = 8 \times \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

กล่าวได้ว่า $\lambda_1 = 3.162278$ เป็น Singular-value decomposition of A

$\lambda_2 = 2.828427$

พิสูจน์

$$= 3.162278 \times \begin{bmatrix} -0.4472 \\ 0 \\ -0.8944 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} + 2.828427 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

$$= 3.162278 \times \begin{bmatrix} 0.316215 & 0.316215 \\ 0 & 0 \\ 0.63243 & 0.63243 \end{bmatrix} + 2.828427 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = A$$

2.24 Let X have covariance matrix

$$\sum=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Find

a) $\sum^{-1}$

$$\sum^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{9} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

b) The eigenvalues and eigenvectors of $\sum$.

Eigenvalue $\lambda_1 = 9$

$\lambda_2 = 4$

$\lambda_3 = 1$

เมื่อ $\lambda_1 = 9$

Eigenvector

$$e_1=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

เมื่อ $\lambda_2 = 4$

Eigenvector

$$e_1=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

เมื่อ $\lambda_3 = 1$

Eigenvector

$$e_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

c) The eigenvalues and eigenvectors of $\sum^{-1}$.

Eigenvalue $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0.25$

$\lambda_3 = 0.1111$

เมื่อ $\lambda_1 = 1$

Eigenvector

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\lambda_2 = 0.25$

Eigenvector

$$e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\lambda_3 = 0.1111$

Eigenvector

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.27

a) $X_1 - 2X_2$

$$E(X_1 - 2X_2) = E(X_1) - 2E(X_2)$$
$$= \mu_1 - 2\mu_2$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = c'\mu$$

$$Var(X_1 - 2X_2) = Var(c'X) = c'\Sigma c$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

($\sigma_{21} \to (12)$)

$$= \sigma_{11} + 2(1)(-2)\sigma_{12} + (-2)^2\sigma_{22}$$

b) $-X_1 + 3X_2$

$$E(-X_1 + 3X_2) = -E(X_1) + 3E(X_2)$$
$$= -\mu_1 + 3\mu_2$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = c'\mu$$

$$Var(-X_1 + 3X_2) = Var(c'X) = c'\Sigma c$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2\sigma_{11} + 2(-1)(3)\sigma_{12} + 3^2\sigma_{22}$$

f) $3x_1 - 4x_2$ if x_1 and x_2 are independent random Variable.

หา $E(3x_1 - 4x_2) = 3E(x_1) - 4E(x_2)$

$= 3\mu_1 - 4\mu_2$

$= \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = c'\mu$

หา $Var(3x_1 - 4x_2) = Var(c'x) = c'\Sigma c$

$= \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

$= 3^2\sigma_{11} + (-4)^2\sigma_{22}$ #

c) $x_1 + x_2 + x_3$

$$E(x_1 + x_2 + x_3) = E(x_1) + E(x_2) + E(x_3)$$
$$= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = c'\mu.$$

$$Var(x_1 + x_2 + x_3) = Var(c'x) = c'\Sigma c$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}+\sigma_{12}+\sigma_{13} & \sigma_{12}+\sigma_{22}+\sigma_{23} & \sigma_{13}+\sigma_{23}+\sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \sigma_{11}+\sigma_{12}+\sigma_{13}+\sigma_{12}+\sigma_{22}+\sigma_{23}+\sigma_{13}+\sigma_{23}+\sigma_{33}$$
$$= \sigma_{11} + 2\sigma_{12} + 2\sigma_{13} + \sigma_{22} + 2\sigma_{23} + \sigma_{33}$$

~~d)~~ e) $x_1 + 2x_2 - x_3$

$$E(x_1 + 2x_2 - x_3) = \mu_1 + 2\mu_2 - 1\mu_3$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = c'\mu$$

$$Var(x_1 + 2x_2 - x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} + 2\sigma_{12} - 1\sigma_{13} & \sigma_{12} + 2\sigma_{22} - 1\sigma_{23} & \sigma_{13} + 2\sigma_{23} - 1\sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= \sigma_{11} + 2\sigma_{12} - \sigma_{13} + 2\sigma_{12} + 4\sigma_{22} - 2\sigma_{23} - \sigma_{13} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}$$
$$= \sigma_{11} + 4\sigma_{12} - 2\sigma_{13} + 4\sigma_{22} - 4\sigma_{23} + \sigma_{33}$$

2.30

a) $E(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $E(AX^{(1)}) = E(X_1 + 2X_2)$

$= E(X_1) + 2E(X_2)$

$= 10$

c) $Cov(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $Cov(AX^{(1)}) = Cov(X_1 + 2X_2)$

$= c'\sum c$

$= [1 \quad 2] \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= 7$

e) $E(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

f) $E(BX^{(2)}) = E\begin{bmatrix} X_3 - 2X_4 \\ 2X_3 - X_4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} E(X_3 - 2X_4) \\ E(2X_3 - X_4) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} E(X_3) - 2E(X_4) \\ 2E(X_3) - E(X_4)) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

g) $Cov(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

h) $Cov(BX^{(2)}) = C\sum_x C'$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 13 & -10 \\ 20 & -8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 33 & 36 \\ 36 & 48 \end{bmatrix}$

i) $Cov(X^{(1)}, X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

j) $Cov(AX^{(1)}, BX^{(2)}) \quad = C\sum_x C'$

$C = AB = \begin{bmatrix} 5 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

$= -10$