206631 Advanced Engineering Stochastic Processes

Juta Pichitlamken

Second Semester 2005

Take-home final exam

กำหนดส่ง วันพุธที่ 15 มีนาคม พ.ศ. 2549 ก่อนเวลา 9.00 น.

ที่ธุรการภาคฯ หรือจะอีเมล์มาที่ juta.p@ku.ac.th ก็ได้

มีการปรับลดคะแนนข้อสอบที่ส่งช้ากว่ากำหนด

**แนวทางในการทำข้อสอบ**

- ให้คุณแสดงวิธีทำโดยละเอียด โดยสามารถใช้ซอฟท์แวร์ทางคณิตศาสตร์ เช่น Maple หรือ Matlab ช่วยคำนวณได้ กรุณาเขียนด้วยลายมือที่อ่านออก หากไม่แน่ใจ ให้ใช้พิมพ์แทน
- ไม่อนุญาติให้ปรึกษาคนอื่น ทั้งที่เป็นเพื่อนร่วมเรียนและไม่ใช่
- อนุญาติให้ใช้หนังสืออื่น นอกเหนือจากหนังสือเรียนได้

**โจทย์จาก Taylor and Karlin (1998)** ข้อละ 6 คะแนน (เก็บ 30% ของเกรดรวมวิชานี้)

1. Problem 4.7 (page 132)
2. Problem 4.7 (page 258) ทำเฉพาะกรณีมีรถ 1 คัน
   **ข้อชี้แจงเพิ่มเติม**: ความน่าจะเป็นที่ฝนตกในช่วงเช้า = ความน่าจะเป็นที่ฝนตกในช่วงบ่าย = p โดยไม่ขึ้นกับอดีต
3. Problem 3.5 (page 296)
4. Problem 4.3 (page 377)
5. Problem 5.4 (page 457)

……………………..

(วฐา มินเสน)

48850226

ข้อ 1

ให้ $X_n$ เป็น Markov chain กับ Transition Probabilities $P_{ij}$ เมื่อพวกเรากำหนดให้ "discount factor" $\beta$ กับ $0<\beta<1$ และ cost function $c(i)$ และ พวกเราปรารถนาให้ตัดสินใจเกี่ยวกับ the total expected discounted cost เมื่อเริ่มที่ที่ state i เมื่อกำหนดให้

$$h_i = E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n c(X_n)\middle|X_o = i\right]$$

ใช้ประโยชน์กับ Firs step analysis เพื่อพิสูจน์ว่า $h_i$ เป็นไปดังนี้

$$h_i = c(i)+\beta\sum_j P_{ij}h_j \qquad \text{สำหรับทุก States i}$$

**ตอบ**

$$h_i = E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n c(X_n)\middle|X_o = i\right]$$

เนื่องกำหนดจุดเริ่มต้นแล้ว n = 0 คือ

$$X_o = i$$

ดังนั้น

$$c(X_o) = c(i)$$

และอัตรา Discount factor $\beta^n$ เมื่อ n= 0 $\therefore \beta^o = 1$

$$h_i = E\left[\left\{\beta^o c(X_o)\middle|X_o = i\right\}+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n c(X_n)\middle|X_o = i\right\}\right]$$

$$h_i = E\left[\{c(i)\}+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n c(X_n)\middle|X_o = i\right\}\right]$$

$$h_i = c(i)+\underbrace{E\left[\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n c(X_n)\middle|X_o = i\right\}\right]}_{\boxed{\text{พิจารณา First step analysis [1]}}} \qquad \text{------------------------------------ (0)}$$

[1] $$E\left[\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n c(X_n)\middle|X_o = i\right\}\right]$$

[1] $$E\left[\sum_j \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n c(X_n) \middle| X_o = i, X_1 = j \right\} \Pr\left\{ X_1 = j \middle| X_o = i \right\}\right]$$

(Sum j ไม่สามารถกำหนดได้ว่าเป็นใดค่าหนึ่ง เนื่องจากที่โจทย์ไม่ได้กำหนด State ของ Transient)

[1] $$E\left[\sum_j \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n c(X_n) \middle| X_o = i, X_1 = j \right\} P_{ij}\right]$$

Markov Property

[1] $$E\left[\sum_j \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n c(X_n) \middle| X_1 = j \right\} P_{ij}\right]$$

แยก $\beta^1$ ออกจากสมการเพื่อจัดรูปใหม่

[1] $$E\left[\beta^1 \sum_j \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} c(X_{n-1}) \middle| X_{1-1} = j \right\} P_{ij}\right]$$ จะเห็นว่า $=$ $$E\left[\sum_j \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n c(X_n) \middle| X_1 = j \right\} P_{ij}\right]$$

$$\beta \sum_j P_{ij} \underbrace{E\left[\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} c(X_{n-1}) \middle| X_{1-1} = j \right\}\right]}_{\boxed{\text{พิจารณา First step analysis [2]}}}$$ ------------------------------------ (1)

[2] $$E\left[\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} c(X_{n-1}) \middle| X_{1-1} = j \right\}\right]$$

จัดรูปแบบใหม่

[2] $$E\left[\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n) \middle| X_0 = j \right\}\right]$$

สังเกตว่า (2) เหมือนกับ $h_i = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n) \middle| X_o = i\right]$ โดยเปลี่ยนจากพิจารณา i เป็น j

$$h_j = E\left[\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n) \middle| X_0 = j \right\}\right]$$ ------------------------------------ (2)

แทน (2) ไปยัง (1) $$\beta\sum_j P_{ij}\, \underbrace{E\left[\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\beta^{n-1}c(X_{n-1})\middle|X_{1-1}=j\right\}\right]}_{h_j}$$

$$\beta\sum_j P_{ij}\, h_j \qquad \text{------------------------------------} \ (3)$$

แทน (3) ไปยัง (0) $$h_i = c(i) + \underbrace{E\left[\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\beta^{n}c(X_{n})\middle|X_{o}=i\right\}\right]}_{\beta\sum_j P_{ij}\, h_j}$$

$\therefore$ สรุปได้ว่า $$h_i = c(i) + \beta\sum_j P_{ij}\, h_j$$

ข้อ 2

การเลือกระหว่างการเดินหรือขับรถจากบ้านไปทำงานในตอนเช้า โดยในตอนบ่ายก็ปฏิบัติเช่นเดียวกัน เขามีกลยุทธ์ในการเดินทางดังนี้ ถ้าฝนตกในตอนเช้าและที่บ้านมีรถจอดอยู่ แล้วเขาจะขับรถไปทำงาน เช่นเดียวกัน ถ้าฝนตกในตอนบ่าย และมีรถจอดอยู่ที่ทำงาน แล้วเขาจะขับรถกลับบ้าน เขาเลือกที่จะเดินในกรณีฝนไม่ตกหรือไม่มีรถจอดอยู่ในที่ๆ เขาอยู่ทั้งตอนเช้าและตอนบ่าย สมมติว่า ความน่าจะเป็นที่ฝนตกในช่วงเช้า เท่ากับ ความน่าจะเป็นที่ฝนตกในช่วงบ่าย = p โดยไม่ขึ้นอยู่กับอดีต ในระยะยาวจงหาเศษส่วนของวัน $(\pi)$ **ของผู้ชายที่จะเดินตากฝน** $(\pi_2)$ **จะเป็นอะไร?**

**ตอบ**

State space $\mathcal{M} = \{1,2,3,4\}$

1 คือ ฝนตก และ มีรถอยู่ (ในอีกความหมาย คือ ขับรถ)

**2 คือ ฝนตก และไม่มีรถ (เดินตากฝน)**

3 คือ ฝนไม่ตก และ มีรถอยู่ (เดินไป)

4 คือ ฝนไม่ตก และ ไม่มีรถอยู่ (เดินไป)

Discrete-state stochastic process $\{S_n ; n = 0,1,2,3,4.......\}$ โดย $n^{th}$ เป็น transaction that half days (Morning, Afternoon) เช่น $S_o ---> S_1$ หมายถึง ตอนเช้าไปตอนบ่าย หรือ ตอนบ่ายไปตอนเช้าของวันถัดไป

| $P_{ij}$ | | | ฝนตก | | ฝนไม่ตก | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | มีรถ | ไม่มีรถ | มีรถ | ไม่มีรถ |
| | | | (1) | (2) | (3) | (4) |
| ฝนตก | มีรถ | (1) | P | - | 1-P | - |
| | ไม่มีรถ | (2) | P | - | 1-P | - |
| ฝนไม่ตก | มีรถ | (3) | - | P | - | 1-P |
| | ไม่มีรถ | (4) | P | - | 1-P | - |

ต้องการหา **ผู้ชายเดินตากฝน** $(\pi_2)$

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= P\pi_1 + P\pi_2 + P\pi_4 \\
\pi_2 &= P\pi_3 \\
\pi_3 &= (1-P)\pi_1 + (1-P)\pi_2 + (1-P)\pi_4 \\
\pi_4 &= (1-P)\pi_3 \\
1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4
\end{aligned}$$

$$0 = (P-1)\pi_1 + P\pi_2 + P\pi_4 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

$$0 = -\pi_2 + P\pi_3 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

$$0 = (1-P)\pi_1 + (1-P)\pi_2 - \pi_3 + (1-P)\pi_4 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (3)}$$

$$0 = (1-P)\pi_3 - \pi_4 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (4)}$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (5)}$$

เนื่องจากการแก้สมการดังกล่าวนี้ ไม่ยุ่งยาก
โดยพิจารณาสมการ (5) และ (3) จะเห็นว่าสามารถหาค่า $\pi_3$ ได้ดังนี้
นำ (1-P) คูณ (5) แล้วนำไปลบ (3)

$$(1-P) = (1-P)\pi_3 + \pi_3$$

$$(1-P) = (2-P)\pi_3$$

$$\frac{(1-P)}{(2-P)} = \pi_3$$

$$\therefore \pi_3 = \frac{(1-P)}{(2-P)}$$

เมื่อได้ค่า $\pi_3$ แล้วสามารถนำมาแทนค่าหาค่า $\pi$ อื่นๆ ได้ดังนี้

แทนค่า $\pi_3$ ในสมการที่ (4)

$$\pi_4 = \frac{(1-P)(1-P)}{(2-P)}$$

$$\therefore \pi_4 = \frac{(1-P)^2}{(2-P)}$$

แทนค่า $\pi_3$ ในสมการที่ (2)

$$\pi_2 = \frac{P(1-P)}{(2-P)}$$

$$\therefore \pi_2 = \frac{P(1-P)}{(2-P)}$$

แทนค่า $\pi_2$ , $\pi_4$ ในสมการที่ (1)

$$0 = (P-1)\pi_1 \quad + P\frac{(P(1-P))}{(2-P)} + P\frac{(1-P)^2}{(2-P)}$$

$$(P-1)\pi_1 = -\left(P\frac{(P(1-P))}{(2-P)} + P\frac{(1-P)^2}{(2-P)}\right)$$

$$(P-1)\pi_1 = -\left(\frac{P^2(1-P) + P(1-P)^2}{2-P}\right)$$

$$(P-1)\pi_1 = -\frac{P(P-1)}{P-2}$$

$$\pi_1 = -\frac{P}{P-2}$$

$$\therefore \pi_1 = -\frac{P}{P-2}$$

ตรวจสอบค่า $\pi$ โดยใช้สมการ (5) ตรวจสอบ

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$

$$1 = \frac{-P}{P-2} + \frac{P(1-P)}{2-P} + \frac{(1-P)}{2-P} + \frac{(1-P)^2}{2-P}$$

$$1 = \frac{-P}{P-2} + \frac{P(1-P)}{2-P} + \frac{(1-P)(1+(1-P))}{2-P}$$

$$1 = \frac{-P}{P-2} + \frac{P(1-P)}{2-P} + \frac{(1-P)(2-P)}{2-P}$$

$$1 = \frac{-P}{P-2} + \frac{P(1-P)}{2-P} + (1-P)$$

$$1 = P + (1-P)$$

$1 = 1$ แสดงว่า $\pi$ ที่คำนวณได้เป็นความจริง

ตรวจสอบคำตอบ เมื่อกำหนด P = 0.2

$$j := \begin{bmatrix} p & 0 & 1-p & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & p & 0 & 1-p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 1-p & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & p & 0 & 1-p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{bmatrix}$$

$p := 0.2$

$$0.2$$

$j^{50}$

$$\begin{bmatrix} 0.111109525280341834 & 0.0888904747196588990 & 0.444438101121367335 & 0.355561898878635596 \\ 0.111109525280341834 & 0.0888904747196588990 & 0.444438101121367335 & 0.355561898878635596 \\ 0.111113093399573593 & 0.0888869066004271264 & 0.444452373598294370 & 0.355547626401708506 \\ 0.111109525280341834 & 0.0888904747196588990 & 0.444438101121367335 & 0.355561898878635596 \end{bmatrix}$$

---

ใช้สูตรคำนวณ

$$\pi_1 = \frac{-0.2}{0.2-2} = 0.111111$$

$$\pi_2 = \frac{0.2(1-0.2)}{2-0.2} = 0.08888$$

$$\pi_3 = \frac{1-0.2}{2-0.2} = 0.4444444$$

$$\pi_4 = \frac{(1-0.2)^2}{2-0.2} = 0.355555$$

สูตรที่พิสูจน์มีความถูกต้อง

ดังนั้นสรุปได้ว่า

$\therefore$ **ผู้ชายเดินตากฝน** = $$\pi_2 = \frac{P(1-P)}{(2-P)}$$

ข้อ 3

ให้ X(t) ให้เป็นขบวนการปัวซงกับพารามิเตอร์ $\lambda$ ให้ T เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระ มีการแจกแจงแบบ Exponential ที่มี pdf. เป็น

$$f_T(t) = \theta e^{-\theta t} \quad \text{for } t > 0$$

ให้ตัดสินใจ The probability mass function สำหรับ X(T)

**ตอบ**

$$X(t) \sim P(\lambda)$$

$$\Pr(X(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda t^{k}}{k!}$$

$$T \sim \mathrm{Exp}(\theta)$$

$$\Pr(T = t) = \theta e^{-\theta t}$$

เมื่อ X(t=T) ทำให้ T กลายเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ Exp ดังนั้นจำเป็นต้องขจัดตัวแปรสุ่มนี้ออกไป ด้วยการสร้างเงื่อนไขกับ T และใช้ The Law of total probability

$$X(T) \Rightarrow \Pr\{X(T) = k\} = \int_0^\infty P_{XT}(k/t) f_T(t)$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} \lambda t^{k}}{k!} \theta e^{-\theta t} dt$$

โดย t = 0 จะทำให้ความน่าจะเป็นมีค่าเป็น 0 อยู่แล้วจึงเริ่ม Integrate จาก 0 ได้ (เนื่องจากโจทย์กำหนด t>0)

Maple

$$\int_0^\infty \frac{e^{(-\lambda \cdot t)} \cdot (\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot \theta \cdot e^{(-\theta \cdot t)} \, dt$$

$$\frac{\lambda^k \theta^{(-k+1)} \left(\frac{\lambda + \theta}{\theta}\right)^{(-k)}}{\lambda + \theta}$$

---

ตรวจสอบคำตอบ The probability mass function

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right)^{-k} \lambda^{k} \theta^{(1-k)}}{\lambda+\theta} \right)$$

ต้องมีค่าเท่ากับ 1

Maple

$$\sum_{k=0}^{infinity} \frac{\left(L^{k} \cdot C^{(1-k)} \cdot \left(\frac{(L+C)}{C}\right)^{-k}\right)}{L+C}$$

1

---

∴ **The probability mass function for X(T) คือ**

$$\Pr\{X(T)=k\}=\frac{\left(\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\right)^{-k}\lambda^{k}\theta^{(1-k)}}{\lambda+\theta}$$

โดยมีพารามิเตอร์ คือ $(\lambda,\theta)$

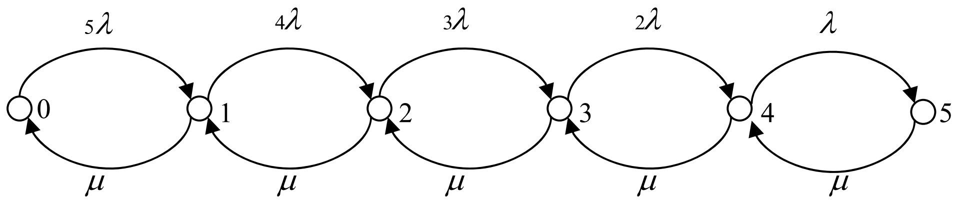
ข้อ 4

มีเครื่องจักร 5 เครื่อง และมีคนซ่อมเครื่อง 1 คน เวลาทำงานจนกระทั่งเครื่องเสียของเครื่องจักรเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ Exponential มีค่าพารามิเตอร์ (Rate) 0.20 ต่อ ชั่วโมง เวลาในการซ่อมเครื่องที่เสียเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ Exponential มีค่าพารามิเตอร์ (Rate) 0.50 ต่อ ชั่วโมง

ทั้ง 5 เครื่องทำงานและการเสียที่เป็นอิสระกัน แต่อย่างมากมี 1 เครื่องที่จะถูกซ่อม **ในระยะยาว เศษส่วนของเวลา ($\pi$) ที่คนซ่อมเครื่องจะว่างงานคืออะไร?**

**ตอบ**

จากการกำหนดอัตราเสียของเครื่องจักรแต่ล่ะเครื่องคือ $\lambda$ = 0.2 ต่อชั่วโมง ดังนั้นโมเดลนี้จึงเป็น M/M/1//5 (With finite population)




State space $\mathcal{M} = \{0,1,2,3,4,5\}$

(จำนวนเครื่องที่เสีย 0 ถึง 5 โดย 0 หมายถึงเสีย 0 เครื่องหรือคนซ่อมว่างงาน)

Generator Matrix is

$$G := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1.3 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1.1 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.9 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

แก้สมการหาคำตอบของแต่ละ $\pi$

$$0 = -\pi_o + 0.5\pi_1$$
$$0 = \pi_o - 1.3\pi_1 + 0.5\pi_2$$
$$0 = 0.8\pi_1 - 1.1\pi_2 + 0.5\pi_3$$
$$0 = 0.6\pi_2 - 0.9\pi_3 + 0.5\pi_4$$
$$0 = 0.4\pi_3 - 0.7\pi_4 + 0.5\pi_5$$
$$0 = 0.2\pi_4 - 0.5\pi_5$$
$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5$$

$$\pi_0 = 0.0697, \pi_1 = 0.1394, \pi_2 = 0.2231, \pi_3 = 0.2677, \pi_4 = 0.2142, \pi_5 = 0.0856$$

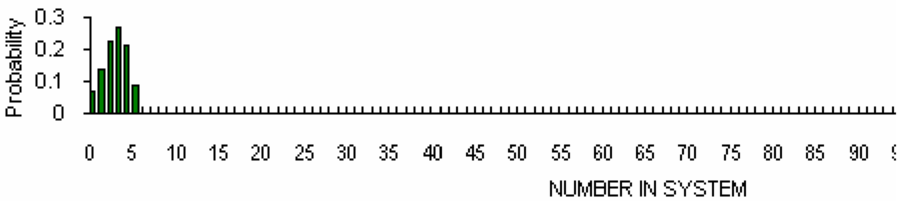
ตรวจสอบคำตอบ(โปรแกรม q ใน Excel)

q in Excel

**M/M/s with Finite Population**

| | | |
|---|---|---|
| Arrival rate | 0.2 | (per machine) |
| Service rate | 0.5 | (per server) |
| Number of servers | 1 | |
| Population size | 5 | |

| | |
|---|---|
| Utilization | 93.03% |
| P(0), probability that the system is empty | 0.0697 |
| Lq, expected queue length | 1.7441 |
| L, expected number in system | 2.6743 |
| Wq, expected time in queue | 3.7496 |
| W, expected total time in system | 5.7496 |
| Probability that a customer waits | 0.9303 |




---

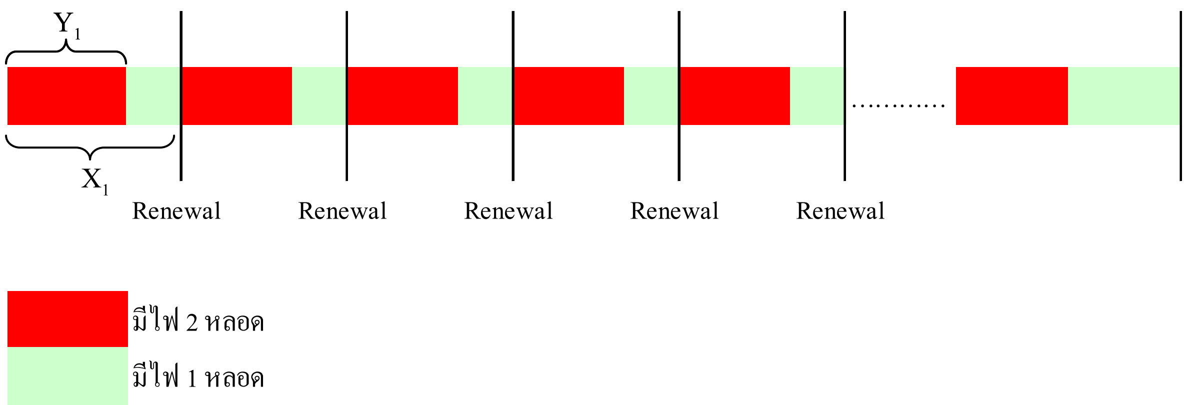
$\therefore$ ในระยะยาว โอกาสที่คนซ่อมเครื่องจะว่างงาน $\pi_o$ **= 0.0697**

ข้อ 5 ศาสตราจารย์ขี้เกียจคนหนึ่งมีของอยู่ประจำบนเพดานในห้องของเขา ซึ่งของชิ้นนั้นก็คือหลอดไฟ 2 หลอด การเปลี่ยนหลอดไฟ ศาสตราจารย์ต้องปีนบันไดซึ่งเขาก็เริ่มขี้เกียจ ดังนั้นถ้ามีหลอดไฟเสีย 1 หลอด เขาจะรอไม่ยอมเปลี่ยนจนกระทั่งหลอดไฟหลอดที่ 2 จะเสีย จึงจะเปลี่ยนมันทั้งคู่ สมมติว่าอายุการใช้งานของหลอดไฟทั้ง 2 เป็นตัวแปรสุ่มที่อิสระกัน

a) ถ้าอายุการใช้งานของหลอดไฟทั้ง 2 เป็น Exponential Distribution ที่มีค่าพารามิเตอร์เหมือนกันทั้ง 2 หลอด(กำหนดให้เป็น $\lambda$) เศษส่วนของเวลา(Fraction of Time)ในระยะยาวที่ศาสตราจารย์ขี้เกียจคนนี้จะใช้หลอดไฟเพียงหลอดเดียว

b) ถ้าอายุการใช้งานของหลอดไฟทั้ง 2 ที่ซื้อมาเป็น Uniform Distribution(0,1) ที่มีค่าพารามิเตอร์เหมือนกันทั้ง 2 หลอด เศษส่วนของเวลา(Fraction of Time)ในระยะยาวที่ศาสตราจารย์ขี้เกียจคนนี้จะใช้หลอดไฟเพียงหลอดเดียว

**ตอบ**




a)

จากคุณสมบัติ $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \dfrac{E(Y_1)}{E(X_1)}$ ____________________(1)

$E(Y_1)$ เป็นค่าคาดหวังของอายุการใช้งานของหลอดไฟหลอดแรกจะเสีย นั้นคือค่าคาดหวังของอายุการใช้งานของหลอดไฟที่มีอายุการใช้งานน้อยกว่าอีกหลอด $E(Min(x_A, x_B))$ โดย $x_A$ เป็นหลอดไฟดวงที่ 1 และโดย $x_B$ เป็น หลอดไฟดวงที่ 2 (ดูรูปประกอบ)

$E(X_1)$ เป็นค่าคาดหวังของอายุการใช้งานของหลอดไฟหลอดที่สองจะเสีย(แสดงว่าหลอดไฟหลอดที่สองมีอายุการใช้งานยาวนานกว่าหลอดแรก) หรือค่าคาดหวังของการเสีย 2 หลอดเมื่อหลอดที่ 1 เสียไปก่อนแล้ว นั้นคือค่าคาดหวังของอายุการใช้งานของหลอดไฟที่มีอายุการใช้งานมากกว่าอีกหลอด $E(Max(x_A, x_B))$

และจากคุณสมบัติที่โจทย์กำหนด คือ หลอดไฟทั้ง 2 เป็น Exponential Distribution ที่มีค่าพารามิเตอร์เหมือนกันทั้ง 2 หลอด(กำหนดให้เป็น $\lambda$) ดังนั้นสามารถนำ Order Statistics มาช่วยในการหาคำตอบได้ ดังนี้

$$a := (1-e^{-\lambda \cdot t})^2$$

$$(1-e^{(-\lambda t)})^2$$

$$b := \frac{d}{dt} a$$

$$2\,(1-e^{(-\lambda t)})\,\lambda\, e^{(-\lambda t)}$$

$$\int_0^\infty t \cdot b \, dt$$

$$\lim_{t \to \infty} \left( \frac{1}{2} \, \frac{2\,\lambda\, t\, (e^{(-\lambda t)})^2 + (e^{(-\lambda t)})^2 - 4\, t\, \lambda\, e^{(-\lambda t)} - 4\, e^{(-\lambda t)} + 3}{\lambda} \right)$$

---

$$F_{max=2}(t) = [F(t)]^2$$

$$F_{max=2}(t) = (1-e^{-\lambda t})^2$$

$$f_{max=2}(t) = 2(1-e^{-\lambda t})\lambda e^{-\lambda t}$$

$$E(X_1) = E(Max(x_A, x_B)) = \int_0^\infty t(2(1-e^{-\lambda t})\lambda e^{-\lambda t})dt = \frac{1}{2}(0+0-0-0+\frac{3}{\lambda}) = \frac{3}{2\lambda}$$

$$c := 1-(1-(1-e^{-\lambda \cdot t}))^2$$

$$1-(e^{(-\lambda t)})^2$$

$$d := \frac{d}{dt} c$$

$$2\,(e^{(-\lambda t)})^2\,\lambda$$

$$\int_0^\infty t \cdot d \, dt$$

$$\lim_{t \to \infty} \left( -\frac{1}{2} \, \frac{e^{(-2\lambda t)} + 2\, e^{(-2\lambda t)}\, \lambda\, t - 1}{\lambda} \right)$$

---

$$F_{min=1}(t) = 1-(1-F(t))^2$$

$$F_{min=1}(t) = 1-(1-(1-e^{-\lambda t}))^2 = 1-(e^{-\lambda t})^2$$

$$f_{min=1}(t) = 2\lambda(e^{-\lambda t})^2 = 2\lambda e^{-2\lambda t}$$

$$E(Y_1) = E(Min(x_A, x_B)) = \int_0^\infty t(2\lambda e^{-2\lambda t})dt = -\frac{1}{2}(0+0-\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{2\lambda}$$

ดังนั้นแทนค่าในสมการ (1) $\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{E(Y_1)}{E(X_1)} = \frac{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)}{\left(\frac{3}{2\lambda}\right)} = \frac{1}{3}$

เนื่องจาก $\frac{1}{3}$ เป็นความน่าจะเป็นในระยะยาวที่จะใช้หลอดไฟ 2 หลอด

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะได้ใช้หลอดไฟ 1 หลอดเป็น $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

**∴ ในระยะยาวที่ศาสตราจารย์ขี้เกียจคนนี้จะใช้หลอดไฟเพียงหลอดเดียว** $= \frac{2}{3}$

b)

จากคุณสมบัติที่โจทย์กำหนด คือ หลอดไฟทั้ง 2 เป็น Uniform Distribution ที่มีค่าพารามิเตอร์เหมือนกันทั้ง 2 หลอด กำหนดให้เป็น(0,1) ดังนั้นสามารถนำ Order Statistics มาช่วยในการหาคำตอบได้ ดังนี้

$e := t^2$

$$t^2$$

$f := \frac{d}{dt} e$

$$2t$$

$\int_0^1 t \cdot f \, dt$

$$\frac{2}{3}$$

---

$F_{max=2}(t) = [F(t)]^2$

$F_{max=2}(t) = (t)^2$

$f_{max=2}(t) = 2t$

$$E(X_1) = E(Max(x_A, x_B)) = \int_0^{\infty} t(2t)dt = \frac{2}{3}$$

Maple

$$g := 1 - (1-t)^2 \qquad 1 - (1-t)^2$$

$$h := \frac{d}{dt} g \qquad 2 - 2t$$

$$\int_0^1 t \cdot h \, dt \qquad \frac{1}{3}$$

---

$$F_{min=1}(t) = 1 - (1 - F(t))^2$$

$$F_{min=1}(t) = 1 - (1-t)^2$$

$$f_{min=1}(t) = 2 - 2t$$

$$E(Y_1) = E(Min(x_A, x_B)) = \int_0^1 t(2-2t)dt = \frac{1}{3}$$

ดังนั้นแทนค่าในสมการ (1) $\lim_{t \to \infty} p(t) = \frac{E(Y_1)}{E(X_1)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $\frac{1}{2}$ เป็นความน่าจะเป็นในระยะยาวที่จะใช้หลอดไฟ 2 หลอด

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะได้ใช้หลอดไฟ 1 หลอดเป็น $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

**∴ ในระยะยาวที่ศาสตราจารย์ขี้เกียจคนนี้จะใช้หลอดไฟเพียงหลอดเดียว** $= \frac{1}{2}$