วฐา มินเสน รหัส 48850226

Home Work 2

โจทย์

Objective to

Min $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^3 + 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2 x_3 - x_2^2 + 2x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3^2 - 2 \\ 2x_1^2 + x_1 x_3 - 2x_2 + 4x_2 x_3 - 4 \\ x_1 x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 x_3 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Newton – Ralpson Method

$$x^{k+1} = x^k + \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \nabla f(x^k) \quad ;k = 0,1,2,3$$

และเพื่อหาทิศทางเพื่อหา Min หรือ Max ทำได้โดย

$$x^{k+1} = x^k + \theta\left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \nabla f(x^k) \quad ;k = 0,1,2,3$$

หาค่า θ ที่ทำให้ค่า $x^{k+1} < x^k$ ในกรณีที่ต้องการหาค่า Min

และทำซ้ำเมื่อค่า $x^{k+1} < x^k$ ยังเป็นจริง

ในการหาค่า Optimization ของ สมการนี้จะหยุดดำเนินการเมื่อ

$$\left\| x^{k+1} - x^k \right\|_\infty < \in$$

และในปัญหานี้พิจาณาค่าของ f(x) ควบคู่ไปด้วยคือ

$$\left\| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right\|_\infty < \in$$

โดยกำหนด $\in = 0.0001$

* หลักการพิจารณา Norms infinity (∞) คือ $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$

Advanced Optimization

ขั้นตอนดำเนินการ

1. ถ้าไม่มีข้อกำหนดของ X

รอบที่ 1 ของ x

กำหนด $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

$$x^0 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix}7\\1\\0\end{bmatrix}, \nabla^2 f(x^0) = \begin{bmatrix}10 & 5 & 3\\5 & 2 & 5\\3 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix}21/128 & -5/128 & -19/128\\-5/128 & -11/128 & 35/128\\-19/128 & 35/128 & 5/128\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7\\1\\0\end{bmatrix}$$

รอบที่ 1 ของ $\theta = 0$

$x_1^1 = 1$

$x_2^1 = 1$

$x_3^1 = 1$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -5$

รอบที่ 2 ของ $\theta = -1$

$x_1^1 = -0.10938$

$x_2^1 = 1.359375$

$x_3^1 = 1.765625$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -9.4165$

ตรวจสอบ $\left\| x^{k+1} - x^k \right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 1.109375

ตรวจสอบ $\left\| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 4.941647

รอบที่ 3 ของ $\theta = -10$

$x_1^1 = -10.0938$

$x_2^1 = 4.59375$

$x_3^1 = 8.65625$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) =$ -947.272

ตรวจสอบ $\left\| x^{k+1} - x^{k} \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า 11.09375
ตรวจสอบ $\left\| f(x^{k+1}) - f(x^{k}) \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า 89.36015

รอบที่ 4 ของ $\theta = -100$

$x_1^1 = -109.938$
$x_2^1 = 36.9375$
$x_3^1 = 77.5625$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) =$ -1202236

ตรวจสอบ $\left\| x^{k+1} - x^{k} \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า 110.9375
ตรวจสอบ $\left\| f(x^{k+1}) - f(x^{k}) \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า 843.0033

รอบที่ 5 ของ $\theta = -10000000$

$x_1^1 = \text{-}1.1\mathrm{E}+07$
$x_2^1 = 3593751$
$x_3^1 = 7656251$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = \text{-}1.2\mathrm{E}+21$

ตรวจสอบ $\left\| x^{k+1} - x^{k} \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า 11093750
ตรวจสอบ $\left\| f(x^{k+1}) - f(x^{k}) \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า 1.23E+09

รอบที่ ∞ ของ $\theta = -\infty$

$x_1^1 = \text{-}\infty$
$x_2^1 = \infty$
$x_3^1 = \infty$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = \text{-}\infty$

ตรวจสอบ $\left\| x^{k+1} - x^{k} \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า ถ้ากำหนด $^{k+1} = \infty + 1 = \infty$ and $^{k} = \infty$ จะได้ $\in$ เข้าใกล้ 0 จึงทำให้การทดสอบเป็นจริง

ตรวจสอบ $\left\| f(x^{k+1}) - f(x^{k}) \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า $^{k+1} = \infty + 1 = \infty$ and $^{k} = \infty$ จะได้ $\in$ เข้าใกล้ 0 จึงทำให้การทดสอบเป็นจริงเช่นเดียวกัน

ดังนั้นคำตอบที่ได้ของสมการ $f(x_1, x_2, x_3)$ นี้เป็น Unbound หรือคำตอบไม่มีจุดสิ้นสุด คือ

$x_1^1 = -\infty$

$x_2^1 = \infty$

$x_3^1 = \infty$

Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -\infty$

---

2. ถ้ากำหนดให้ X ทุกค่าเป็น Non Negative

รอบที่ 1 ของ x

กำหนด $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla^2 f(x^0) = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 21/128 & -5/128 & -19/128 \\ -5/128 & -11/128 & 35/128 \\ -19/128 & 35/128 & 5/128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 1 ของ $\theta = 0$

$x_1^1 = 1$

$x_2^1 = 1$

$x_3^1 = 1$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -5$

รอบที่ 2 ของ $\theta = -0.01$

$x_1^1 = 0.889063$

$x_2^1 = 1.035938$

$x_3^1 = 1.076563$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -5.70483$

ตรวจสอบ $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.110938

ตรวจสอบ $\|f(x^{k+1}) - f(x^k)\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.704832

รอบที่ 3 ของ $\theta = -0.02$

$x_1^1 = 0.778125$

$x_2^1 = 1.071875$

$x_3^1 = 1.153125$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -6.34303$

ตรวจสอบ $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.221875

ตรวจสอบ $\left\|f(x^{k+1})-f(x^k)\right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.638201

รอบที่ 4 ของ $\theta = -0.03$

$x_1^1 = 0.667188$

$x_2^1 = 1.107813$

$x_3^1 = 1.229688$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) =$ -6.92203

ตรวจสอบ $\left\|x^{k+1}-x^k\right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.332813

ตรวจสอบ $\left\|f(x^{k+1})-f(x^k)\right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.638201

รอบที่ 5 ของ $\theta = -0.04$

$x_1^1 = 0.55625$

$x_2^1 = 1.14375$

$x_3^1 = 1.30625$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) =$ -7.44927

ตรวจสอบ $\left\|x^{k+1}-x^k\right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.44375

ตรวจสอบ $\left\|f(x^{k+1})-f(x^k)\right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.579001

รอบที่ 6 ของ $\theta = -0.05$

$x_1^1 = 0.445313$

$x_2^1 = 1.179688$

$x_3^1 = 1.382813$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) =$ -7.93216

ตรวจสอบ $\left\|x^{k+1}-x^k\right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.554688

ตรวจสอบ $\left\|f(x^{k+1})-f(x^k)\right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.527232

รอบที่ 7 ของ $\theta = -0.06$

$x_1^1 = 0.334375$

$x_2^1 = 1.215625$

$x_3^1 = 1.459375$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -8.37815$

ตรวจสอบ $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.665625

ตรวจสอบ $\|f(x^{k+1}) - f(x^k)\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.482894

รอบที่ 8 ของ $\theta = -0.07$

$x_1^1 = 0.223438$

$x_2^1 = 1.251563$

$x_3^1 = 1.535938$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -8.79466$

ตรวจสอบ $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.776563

ตรวจสอบ $\|f(x^{k+1}) - f(x^k)\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.445987

รอบที่ 9 ของ $\theta = -0.08$

$x_1^1 = 0.1125$

$x_2^1 = 1.2875$

$x_3^1 = 1.6125$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -9.18912$

ตรวจสอบ $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.8875

ตรวจสอบ $\|f(x^{k+1}) - f(x^k)\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.416511

รอบที่ 10 ของ $\theta = -0.09$

$x_1^1 = 0.001563$

$x_2^1 = 1.323438$

$x_3^1 = 1.689063$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -9.56898$

ตรวจสอบ $\left\| x^{k+1} - x^{k} \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า 0.998438

ตรวจสอบ $\left\| f(x^{k+1}) - f(x^{k}) \right\|_{\infty} < 0.0001$ ได้ค่า 0.394466

รอบที่ 11 ของ $\theta = -0.1$

$x_1^1 = -.10938$

$x_2^1 = 1.359375$

$x_3^1 = 1.765625$

พบว่าเกิดค่าติดลบที่เป็นไปไม่ได้ ดังนั้นใช้ค่ารอบที่ 10 ของ $\theta = -0.09$ กำหนดค่า

$x_1^1 = 0.001563$

$x_2^1 = 1.323438$

$x_3^1 = 1.689063$

รอบที่ 2 ของ x

$x_1^1 = 0.001563$

กำหนด $x_2^1 = 1.323438$

$x_3^1 = 1.689063$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 0.001563 \\ 1.323438 \\ 1.689063 \end{bmatrix}, \nabla f(x^1) = \begin{bmatrix} 3.09658 \\ 2.297244 \\ 1.48968 \end{bmatrix}, \nabla^2 f(x^1) = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 0.001563 \\ 1.323438 \\ 1.689063 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 21/128 & -5/128 & -19/128 \\ -5/128 & -11/128 & 35/128 \\ -19/128 & 35/128 & 5/128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.09658 \\ 2.297244 \\ 1.48968 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 1 ของ $\theta = 0$

$x_1^2 = 0.001563$

$x_2^2 = 1.323438$

$x_3^2 = 1.689063$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -9.56898$

รอบที่ 2 ของ $\theta = -0.002$

$x_1^2 = 0.000284$
$x_2^2 = 1.324889$
$x_3^2 = 1.688842$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -9.56927$

ตรวจสอบ $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.001451
ตรวจสอบ $\|f(x^{k+1}) - f(x^k)\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 0.000291

รอบที่ 3 ของ $\theta = -0.004$
$x_1^2 = -0.001$
$x_2^2 = 1.32634$
$x_3^2 = 1.688621$

พบว่าเกิดค่าติดลบที่เป็นไปไม่ได้ ดังนั้นใช้ค่ารอบที่ 2 ของ $\theta = -0.002$ กำหนดค่า
$x_1^2 = 0.000284$
$x_2^2 = 1.324889$
$x_3^2 = 1.688842$

รอบที่ 3 ของ x
$x_1^2 = 0.000284$
กำหนด $x_2^2 = 1.324889$
$x_3^2 = 1.688842$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 0.000284 \\ 1.324889 \\ 1.688842 \end{bmatrix}, \nabla f(x^2) = \begin{bmatrix} 3.091218 \\ 2.300813 \\ -1.488 \end{bmatrix}, \nabla^2 f(x^2) = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^3 = \begin{bmatrix} 0.000284 \\ 1.324889 \\ 1.688842 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 21/128 & -5/128 & -19/128 \\ -5/128 & -11/128 & 35/128 \\ -19/128 & 35/128 & 5/128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.091218 \\ 2.300813 \\ -1.488 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 1 ของ $\theta = 0$

$x_1^3 = 0.000284$

$x_2^3 = 1.324889$

$x_3^3 = 1.688842$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -9.56927$

รอบที่ 2 ของ $\theta = -0.0001$

$x_1^3 = 0.00022$

$x_2^3 = 1.324961$

$x_3^3 = 1.688831$

แทนค่าใน Objective to $f(x_1, x_2, x_3) = -9.56928$

ตรวจสอบ $\left\| x^{k+1} - x^k \right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 7.25E-05

ตรวจสอบ $\left\| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right\|_\infty < 0.0001$ ได้ค่า 1.37E-05

จากการตรวจสอบพบว่าทั้ง

$\left\| x^{k+1} - x^k \right\|_\infty = 7.25E-05 < 0.0001$ และ $\left\| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right\|_\infty = 1.37E-05 < 0.0001$

จึงหยุดหาค่า Optimization สรุปว่าได้ค่า

$x_1 = 0.00022$

$x_2 = 1.324961$

$x_3 = 1.688831$

ได้ค่า $f(x_1, x_2, x_3) = -9.56928$

*****ทดสอบเพิ่มเติม******

จากการทดลองค่าเริ่มต้น x_i เป็นค่า $x_1 = 0.0001, x_2 = 0.94, x_3 = 1.95$
และทำตามขั้นตอนนี้(Newton – Ralpson) ซ้ำๆ จะได้ค่า

$x_1^* = 0.00009898$

$x_2^* = 0.9400012$

$x_3^* = 1.9500003$

ได้ค่า $f(x_1, x_2, x_3) = -10.9472$ ซึ่งเป็นค่าต่ำสุด(Min) ของสมการ

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2 x_3 - x_2^2 + 2x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3$$

จากการหาค่า Optimization ของวิธี Newton – Ralpson นั้นพบว่าการกำหนดค่าเริ่มต้นของ $f(x_1, x_2, x_3)$ นั้นมีผลอย่างมากในการจะเข้าใกล้ค่าที่ดีที่สุด (Optimal) ของสมการวัตถุประสงค์