[illegible] 48850226

NO. ....

DATE / /

HW 4.1 พิสูจน์ว่าฟังก์ชัน $s = \left\{ x \;\middle|\; \begin{cases} A_1 x = b_1 \\ A_2 x \le b_2 \\ A_3 x \geq b_3 \end{cases} \right.$ เป็น Convex set

$x \geq 0$

กำหนด $x_1 \subset S \Rightarrow \begin{aligned} A_1 x_1 &= b_1 \\ A_2 x_1 &\le b_2 \\ A_3 x_1 &\geq b_3 \end{aligned}$, $x_2 \subset S \Rightarrow \begin{aligned} A_1 x_2 &= b_1 \\ A_2 x_2 &\le b_2 \\ A_3 x_2 &\geq b_3 \end{aligned}$

ถ้า $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \quad 0 \le \alpha \le 1$ จะเป็น Convex set

convex combination

1. $\alpha A_1 x_1 = b_1(\alpha)$ — ①

$(1-\alpha) A_1 x_2 = b_1(1-\alpha)$ — ②

① + ② $\alpha A_1 x_1 + (1-\alpha) A_1 x_2 = \alpha b_1 + (1-\alpha) b_1$

$= A_1 \underbrace{(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)}_{x} = (\alpha - 1 - \alpha) b_1$

$\therefore x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ เป็น Convex set

or $\alpha \underbrace{A_1 x_1}_{b_1} + (1-\alpha) \underbrace{A_1 x_2}_{b_1} = b_1$

กำหนด $A_1 x_1$ คือ b_1

$A_1 x_2$ คือ b_1

$\therefore \alpha b_1 + (1-\alpha) b_1 = b_1$

$\boxed{b_1 = b_1}$

เป็น Convex set *

convex combination

2. $\alpha A_2 x \le \alpha b_2$ — ①

$(1-\alpha) A_2 x_2 \le (1-\alpha) b_2$ — ②

① + ② $\alpha A_2 x_1 + (1-\alpha) A_2 x_2 \le \alpha b_2 + (1-\alpha) b_2$

$= A_2 (\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \le b_2$

$\therefore x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ เป็น convex set

Or $\alpha \underbrace{A_2 x_1}_{\le b_2 \} b_2'} + (1-\alpha) \underbrace{A_2 x_2}_{\le b_2 \} b_2''} \le b_2$

กำหนด $A_2 x_1$ คือ $\le b_2$ ให้เป็นตัวแปร b_2'

$A_2 x_2$ คือ $\le b_2$ ให้เป็นตัวแปร b_2''

$\therefore b_2''' = \mathrm{Max}\{ b_2', b_2'' \} \le b_2$

$\alpha b_2''' + (1-\alpha) b_2''' \le b_2$

เป็น convex set

เพราะ: $\boxed{b_2''' \le b_2}$

NO. ....

DATE / /

convex combination

3. $\alpha A_3 x_1 \geq \alpha b_3$ — ①

$(1-\alpha) A_3 x_2 \geq (1-\alpha) b_3$ — ②

①+② $\alpha A_3 x_1 + (1-\alpha) A_3 x_2 \geq \alpha b_3 + (1-\alpha) b_3$

$$A_3 (\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \geq b_3$$

$\therefore$ $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ เป็น convex set.

or $$\underbrace{\alpha A_3 x_1}_{\geq b_3 \} b_3'} + \underbrace{(1-\alpha) A_3 x_2}_{\geq b_3 \} b_3''} \geq b_3$$

กำหนด $A_3 x_1$ นั้น $\geq b_3$ ให้เป็นค่าแปร b_3' $\therefore$ $b_3''' = \min \{ b_3', b_3'' \} \geq b_3$

$A_3 x_2$ นั้น $\geq b_3$ ให้เป็นค่าแปร b_3''

$$\alpha b_3''' + (1-\alpha) b_3''' \geq b_3$$

เป็น convex set.

เพราะ: $\boxed{b_3''' \geq b_3}$ //

HW 4.2 พิสูจน์ $f(Q) = \frac{DS}{Q} + \frac{QH}{2}$ เป็น convex function.

เงื่อนไข convex function คือ $f(\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2) \leq \alpha f(Q_1) + (1-\alpha) f(Q_2)$

ดังนั้น

$$\frac{DS}{\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2} + \frac{H(\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2)}{2} \leq \alpha \left(\frac{DS}{Q_1} + \frac{Q_1 H}{2} \right) + (1-\alpha) \left(\frac{DS}{Q_2} + \frac{Q_2 H}{2} \right)$$

$$\frac{DS}{\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2} + \frac{\alpha Q_1 H}{2} + \boxed{\frac{(1-\alpha) Q_2 H}{2}} \leq \frac{\alpha DS}{Q_1} + \frac{\alpha Q_1 H}{2} + (1-\alpha)\frac{DS}{Q_2} + \boxed{\frac{(1-\alpha) Q_2 H}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{DS}{\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2} \leq \frac{\alpha DS}{Q_1} + (1-\alpha)\frac{DS}{Q_2}$$

$$\frac{DS}{\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2} \leq DS \frac{(\alpha Q_2 + (1-\alpha) Q_1)}{Q_1 Q_2}$$

$$\frac{1}{\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2} \text{ — ① } \leq \frac{\alpha Q_2 + (1-\alpha) Q_1}{Q_1 Q_2} \longrightarrow ②$$

ทดลองค่ากำหนด Q_1 มาก Q_2 น้อย.

α มาก $1-\alpha$ น้อย.

#1

$$\frac{1}{0.99(1000000)+0.01(1)} \leq \frac{0.99}{1000000} + \frac{0.01}{1}$$

$$1.0 \times 10^{-6} \leq 0.01$$ จริง ✓

#2

Q_1 น้อย Q_2 มาก

α มาก $1-\alpha$ น้อย.

$$\frac{1}{0.99(1)+0.01(1000000)} \leq \frac{0.99}{1} + \frac{0.01}{1000000}$$

$$0.00009 \leq 0.99$$ จริง ✓

#3

Q_1 มาก Q_2 น้อย

α น้อย $1-\alpha$ มาก

$$\frac{1}{0.01(1000000)+0.99(1)} \leq \frac{0.01}{1000000} + \frac{0.99}{1}$$

$$0.9 \times 10^{-5} \leq 0.99$$ จริง ✓

#4

Q_1 น้อย Q_2 มาก

α น้อย $1-\alpha$ มาก

$$\frac{1}{0.01(1)+0.99(1000000)} \leq \frac{0.01}{1} + \frac{0.99}{1000000}$$

$$0.1 \times 10^{-5} \leq 0.01$$ จริง ✓ #

เป็น convex function ทุกกรณี

HW 4.3 $S = \left\{ x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \le 25 \\ 2x + 3y - z \geq 10 \\ x, y, z \geq 0 \end{array} \right\}$

กำหนด x_1, y_1, z_1 โดย $\forall_1 \geq 0$

กำหนด x_2, y_2, z_2 โดย $\forall_2 \geq 0$.

$\therefore \; x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \le 25 \quad ; \quad 2x_1 + 3y_1 - z_1 \geq 10$

$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \le 25 \quad ; \quad 2x_2 + 3y_2 - z_2 \geq 10$

ทำ convex combination เพื่อพิสูจน์ว่าเป็น convex set

$\alpha(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \le \alpha(25) \quad ; \quad \alpha(2x_1 + 3y_1 - z_1) \geq \alpha(10)$

$1-\alpha(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \le (1-\alpha)(25) \quad ; \quad 1-\alpha(2x_2 + 3y_2 - z_2) \geq 1-\alpha(10)$

convex combination

$\le 25 \longrightarrow k \longleftarrow \le 25$

$\alpha(\underbrace{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}_{}) + 1-\alpha(\underbrace{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}_{}) \le \alpha(25) + (1-\alpha)(25)$

กำหนด $k \le 25$ มากที่สุดคือ $k = 25$

$\alpha k + (1-\alpha) k \le 25$

$k \le 25$

$Max(k) \le 25$

$25 = 25$

$\boxed{\text{เป็น convex set}}$ ※

$\alpha(10) + 1-\alpha(10)$

$\alpha(\underbrace{2x_1 + 3y_1 - z_1}_{\geq 10}) + 1-\alpha(\underbrace{2x_1 + 3y_1 - z_1}_{\geq 10}) \geq 10$

$\geq 10 \longrightarrow W \longleftarrow \geq 10$

กำหนดตัวแปร $W \geq 10$ $Min(W) = 10$

$\alpha W + (1-\alpha) W \geq 10$

$W \geq 10$

$Min(W) \geq 10$

$10 = 10$

$\boxed{\text{เป็น convexset}}$ ※

ดังนั้น $S = \left\{ x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \le 25 \\ 2x + 3y - z \geq 10 \\ x, y, z \geq 0 \end{array} \right\}$ เป็น convexset

※

```
> implicitplot3d([x^2+y^2+z^2<=25, 2*x+3*y-z>=10], x=0..5, y=0..5,
  z=0..5,color=[aquamarine,sienna], scaling=constrained, axes=boxed );
```